DIMENSÕES

12

Matemática A 12.º ano de escolaridade

Caderno de preparação para o exame

Índice

SANTILLANA

Caro aluno,

Este livro tem por base o pressuposto de que o exame de Matemática A irá ser constituído por dois cadernos: um primeiro caderno em que se pode fazer uso da calculadora gráfica e um segundo caderno em que não se pode utilizar a calculadora gráfica nem qualquer calculadora.

Nas seis provas modelo propostas neste livro estão todos os conteúdos lecionados no ensino secundário.

Esperamos que lhe seja útil.

Saudações,

Os autores

Caderno 1 — 45 minutos

É PERMITIDA A UTILIZAÇÃO DE CALCULADORA GRÁFICA.

Na resposta aos itens deste caderno, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1

Um ginásio tem tantos sócios do sexo feminino como do sexo masculino.
Relativamente aos sócios desse ginásio, sabe-se que metade das mulheres e um quinto dos homens praticam Pilates.

1.1 Seleciona-se, ao acaso, um sócio deste ginásio.
Determine a probabilidade de este praticar Pilates. Apresente o resultado em percentagem.

1.2 Considere agora que o referido ginásio tem 200 sócios. Escolhem-se, ao acaso, dois desses sócios.
Determine a probabilidade de estes serem do mesmo sexo. Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

2

Considere as funções f e g de domínio $\mathbb{R}^+$ definidas por

$$f(x) = 2\ln x \text{ e } g(x) = \frac{1}{x}$$

2.1 Justifique que o gráfico de f interseta o gráfico de g num único ponto de abcissa pertencente ao intervalo $[1, 2]$.

2.2 Utilize a calculadora gráfica para determinar um valor aproximado da abcissa do ponto de interseção dos gráficos de f e de g .
Apresente a abcissa arredondada às centésimas.
Na sua resposta, reproduza, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções que visualizar na calculadora e que lhe permite(m) resolver o problema.

COTAÇÕES (Caderno 1)				
Item — Cotações (em pontos)				Total
1.1	1.2	2.1	2.2	
10	10	15	15	**50 pontos**

Caderno 2 105 minutos

NÃO É PERMITIDA A UTILIZAÇÃO DE CALCULADORA GRÁFICA.

Grupo I

Na resposta aos itens deste grupo, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

1

Suponha que dispõe de seis fichas azuis, seis fichas verdes e seis fichas vermelhas, apenas distinguíveis pela cor, para colocar num tabuleiro constituído por 10 quadrados adjacentes, como ilustra a figura 1.

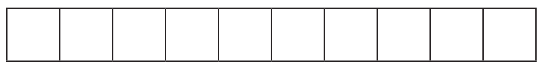


Fig. 1

Admitindo que se coloca uma única ficha em cada quadrado, quantas disposições diferentes é possível obter com exatamente duas fichas azuis e duas fichas vermelhas?

(A) ${}^{6}C_2 \times {}^{6}C_2$ **(B)** ${}^{10}C_2 \times {}^{8}C_2$ **(C)** ${}^{6}A_2 \times {}^{6}C_2 \times 6!$ **(D)** ${}^{10}A_2 \times {}^{8}C_2 \times 6!$

2

Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$. Sabe-se que f é duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$ e que o seu gráfico admite dois pontos de inflexão.

Qual das seguintes expressões pode definir f'', segunda derivada de f?

(A) $f''(x) = (x-2)^2$ **(B)** $f''(x) = x^2 - 4$ **(C)** $f''(x) = x^2(x-2)$ **(D)** $f''(x) = x^2 + 4$

3

Na figura 2, está representado, no plano complexo, um triângulo equilátero $[ABC]$ centrado na origem.

O vértice A tem coordenadas $\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$.

Qual dos números complexos seguintes tem como afixo o vértice C?

(A) $2e^{i\frac{11\pi}{12}}$ **(C)** $\sqrt{2}\,e^{-i\frac{5\pi}{12}}$

(B) $2e^{i\frac{19\pi}{12}}$ **(D)** $\sqrt{2}\,e^{-i\frac{13\pi}{12}}$

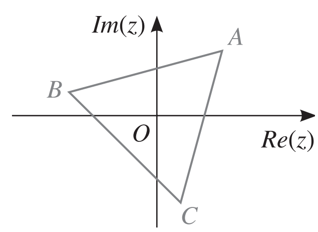


Fig. 2

4

Na figura 3, está representado um triângulo isósceles $[ABC]$.

Sabe-se que:

- $\overline{AB} = \overline{AC} = a \ (a \in \mathbb{R}^+)$
- $B\hat{A}C = 30°$

Qual é, em função de a, o valor do produto escalar $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA}$?

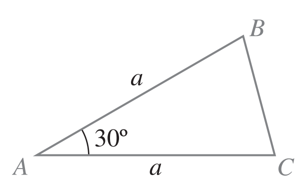


Fig. 3

(A) $-\dfrac{\sqrt{3}\,a^2}{2}$ **(B)** $-\dfrac{a^2}{2}$ **(C)** $\dfrac{a^2}{2}$ **(D)** $\dfrac{\sqrt{3}\,a^2}{2}$

5

Seja f a função de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = 2\sin^2 x$.

Qual é o declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $\dfrac{\pi}{10}$?

(A) $2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{10}\right)$ **(B)** $\dfrac{1}{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{10}\right)$ **(C)** $2\sin\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$ **(D)** $\sin\dfrac{\pi}{20}$

6

Na figura 4, estão representados, num referencial o.n. xOy, a circunferência trigonométrica e o triângulo $[ABO]$.

Sabe-se que:

- os pontos B e C têm coordenadas $(0, -1)$ e $(1, 0)$, respetivamente;
- o ponto A pertence à circunferência trigonométrica, tal que, sendo α a amplitude do ângulo COA, $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.

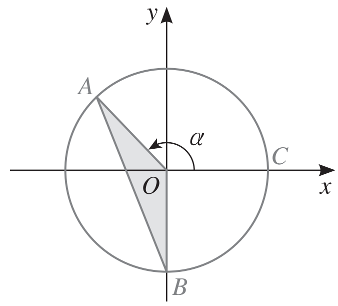


Fig. 4

Qual das expressões seguintes representa a área do triângulo $[ABO]$ em função de α?

(A) $-\frac{1}{2}\cos\alpha$ **(B)** $\frac{1}{2}\cos\alpha$ **(C)** $\cos\alpha$ **(D)** $-\cos\alpha$

7

Considere a sucessão (u_n) de termo geral:

$$u_n = n\ln(n+2) - n\ln(n)$$

Qual é o valor de $\lim(u_n)$?

(A) 0 **(B)** 2 **(C)** e **(D)** e^2

8

No referencial o.n. $Oxyz$ da figura 5, está representado o triângulo $[ABC]$.

Sabe-se que:

- o triângulo $[ABC]$ é equilátero e tem perímetro igual a 6;
- os pontos A, B e C pertencem ao semieixo positivo Ox, Oy e Oz, respetivamente.

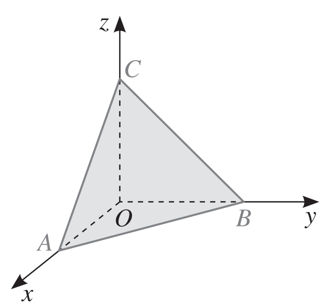


Fig. 5

Uma equação do plano ABC é:

(A) $x + y + z = \sqrt{2}$ **(C)** $x + y + z = 2$

(B) $x + y - z = \sqrt{2}$ **(D)** $x + y - z = 2$

Grupo II

Na resposta aos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1

Seja r um número real positivo e seja θ um número real pertencente ao intervalo $]0, \pi[$.
Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere:

$$z = \frac{re^{i\theta}}{2-2i}$$

Sabe-se que, no plano complexo, o afixo de z pertence à circunferência de centro na origem e raio $\sqrt{2}$ e à bissetriz dos quadrantes pares.

Determine o valor de r e de θ.

2

Prove, dado um conjunto finito E, uma probabilidade P em $\mathcal{P}(E)$ e dois acontecimentos $A, B \in \mathcal{P}(E), P(A) \neq 0$, que:

$$P(A) \times P(B|A) = 1 - P(\overline{A} \cup \overline{B})$$

3

Na figura 6, está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, um paralelepípedo reto.

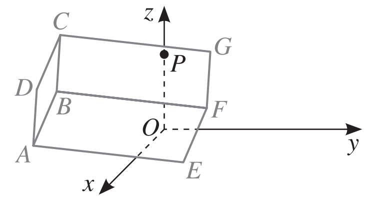


Fig. 6

Sabe-se que:

- $[ABCD]$ é uma face do paralelepípedo;
- $[EFGH]$ é a face oposta à face $[ABCD]$ (o ponto H não está representado na figura);
- O vértice A tem coordenadas $(14, -7, 4)$;
- O vértice B tem coordenadas $(16, -4, 10)$;
- O plano ABC é definido pela equação $3x - 6y + 2z - 92 = 0$.

3.1 Determine uma equação vetorial da reta AE.

3.2 O ponto P é o ponto de interseção do eixo Oz com a face $[BCGF]$. Determine as coordenadas do ponto P.

4

Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{1-x} - 1}{(x-1)^2} & \text{se } x < 1 \\ (x+4)\ln x & \text{se } x \geqslant 1 \end{cases}$$

4.1 Averigue da existência de assíntotas verticais ao gráfico da função f.

4.2 Estude a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão, no intervalo $]1, +\infty[$.

Na sua resposta, apresente:

- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima;
- as coordenadas do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de f.

5

Na figura 7, está representado, num referencial o.n. xOy, o gráfico da função f, de domínio $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right[$, definida por

$$f(x) = 2x - 2\cos(2x)$$

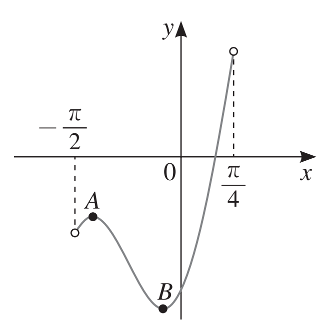


Fig. 7

Sabe-se que A e B são pontos dos gráficos de f cujas ordenadas são extremos relativos de f.

5.1 Determine as coordenadas dos pontos A e B.

5.2 Seja $\beta = \arcsin\left(-\frac{1}{5}\right)$.

Determine o declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa β.

COTAÇÕES (Caderno 2)									
Grupo	**Item — Cotações (em pontos)**								
I	1 a 8 8 × 5 pontos								**40**
II	**1**	**2**	**3.1**	**3.2**	**4.1**	**4.2**	**5.1**	**5.2**	
	12	15	10	15	13	15	15	15	**110**
								Total	**150**

Caderno 1 40 minutos

É PERMITIDA A UTILIZAÇÃO DE CALCULADORA GRÁFICA.

Na resposta aos itens deste caderno, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1

Seja E um conjunto finito, P uma probabilidade em $\mathcal{P}(E)$ e $A, B \in \mathcal{P}(E)$, tais que

$$P(A \cup B) = \frac{17}{25}, \; P(A) = 3P(B) \text{ e } P(A \cap B) = \frac{1}{5}$$

Averigue se A e B são acontecimentos independentes.

2

Após a administração oral de um determinado analgésico, a quantidade de substância ativa no sangue, em miligramas por litro, é dada em função do tempo, t, em horas por:

$$f(t) = 80(e^{-0,4t} - e^{-1.2t})$$

2.1 Qual é a quantidade de substância ativa existente no sangue ao fim de quatro horas?

Apresente o resultado arredondado às décimas do miligrama.

2.2 Utilizando processos analíticos e a calculadora apenas para cálculos numéricos, determine o instante em que a quantidade de substância ativa no sangue atinge o valor máximo.

Apresente o resultado arredondado às décimas de hora.

2.3 Sabe-se que a eficácia do analgésico depende da existência de uma quantidade mínima de 8 mg/L de substância ativa existente no sangue.

Utilizando a calculadora gráfica, determine durante quanto tempo se mantém a eficácia deste medicamento.

Apresente o gráfico ou os gráficos das funções que visualizar na calculadora e os pontos relevantes para a resolução do problema.

Apresente o resultado em horas e minutos, arredondado à unidade de minuto.

COTAÇÕES (Caderno 1)				
Item — Cotações (em pontos)				Total
1.1	2.1	2.2	2.3	
15	5	15	15	50 pontos

Caderno 2 110 minutos

NÃO É PERMITIDA A UTILIZAÇÃO DE CALCULADORA GRÁFICA.

Grupo I

Na resposta aos itens deste grupo, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

1

Numa caixa, estão seis bolas indistinguíveis ao tato numeradas de 1 a 6 .

De quantas maneiras diferentes se podem colocar as seis bolas lado a lado, de forma que as bolas com números múltiplos de 3 não fiquem juntas?

(A) $6! - 5! \times 2$ **(B)** $5! \times 2!$ **(C)** ${}^6C_2 \times 4!$ **(D)** ${}^6A_6 - {}^6C_2 \times 4!$

2

Na figura 1, está representado o gráfico da derivada de uma função f de domínio $[-2, 8]$.

Sabe-se que $f(-1) = 4$.

Qual pode ser o valor de $f(0)$?

(A) 2 **(C)** 4

(B) 3 **(D)** 6

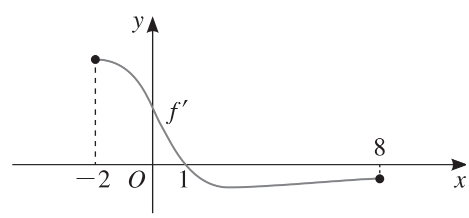


Fig. 1

3

Sabe-se que $\log_2 a = \dfrac{1}{3}$ e que $\log_b 2 = \dfrac{3}{4}$, $a, b \in \mathbb{R}^+$, $b \neq 1$.

Qual é o valor de $\log_2(a^5 \times b)$?

(A) $\dfrac{1}{6}$ **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3

4

Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z = 5 - 12i$ e

$$w = \frac{\overline{i \times z^2}}{z}$$

Seja α o argumento principal de z .

Qual das seguintes proposições é verdadeira?

(A) $w = 169e^{i\left(-3\alpha + \frac{\pi}{2}\right)}$ **(C)** $w = 13e^{i\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}$

(B) $w = 13e^{i\left(-3\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}$ **(D)** $w = 156e^{i\left(-3\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}$

5

Seja f a função de domínio $\mathbb{R}$, tal que $f(0) = 3$ e $f'(x) = 2 + \sin(2x)$.

Qual das seguintes expressões pode definir a função f ?

(A) $f(x) = 2x + \dfrac{7}{2} - \dfrac{1}{2}\cos(2x)$ **(C)** $f(x) = 2x + \dfrac{7}{2} + \cos(2x)$

(B) $f(x) = x^2 + \dfrac{5}{2} - \dfrac{1}{2}\cos(2x)$ **(D)** $f(x) = 2x + \dfrac{1}{2}\sin(2x)$

6

Seja f a função de domínio $\mathbb{R}^+$ definida por $f(x) = \log_2 x$ e (x_n) a sucessão de termo geral $x_n = \dfrac{n+3}{n}$.

Qual é o valor de $\lim \dfrac{f(x_n)}{x_n - 1}$?

(A) 2 **(B)** 1 **(C)** $\ln 2$ **(D)** $\log_2 e$

7

Na figura 2, estão representados, no plano complexo, os afixos de quatro números: w_1 , w_2 , w_3 e w_4 .

Qual é o número complexo que, com $n \in \mathbb{N}$, pode ser igual a $\dfrac{i^{8n}}{i^{4n+1}} - \dfrac{1}{i^2}$?

(A) w_1 **(C)** w_3

(B) w_2 **(D)** w_4

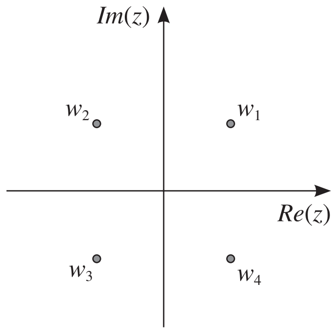


Fig. 2

8

Na figura 3, estão representados, em referencial o.n. xOy , uma circunferência de centro na origem e raio 2 e um triângulo $[ABP]$.

Admita que:

- o ponto A tem coordenadas $(-2, 0)$;
- o ponto P se desloca sobre a circunferência;
- $\alpha \in]0, \pi[$ é a amplitude em radianos de BOP ;
- o ponto B desloca-se sobre o eixo Ox acompanhando o movimento de P , de tal forma que $\overline{AP} = \overline{BP}$.

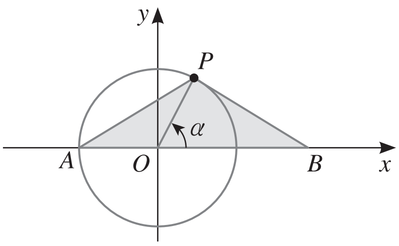


Fig. 3

Qual das seguintes expressões representa, em função de α , a área do triângulo $[ABP]$?

(A) $\sin \alpha \, (1 + \cos \alpha)$ **(C)** $4 \sin \alpha + 2 \sin(2\alpha)$

(B) $4 \cos \alpha + 2 \cos(2\alpha)$ **(D)** $4 \sin \alpha \, (2 - 2 \cos \alpha)$

Grupo II

Na resposta aos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1

Considere os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e todas as funções injetivas que é possível definir de A para B .

Escolhida uma destas funções ao acaso, qual é a probabilidade de esta ter contradomínio A ?

Uma resposta possível para este problema é

$$\frac{4!}{^6A_4}$$

Elabore uma pequena composição na qual explique a expressão apresentada.

Na sua resposta:

- enuncie a regra de Laplace;
- explique o número de casos possíveis;
- explique o número de casos favoráveis.

2

Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = -\sqrt{3} + i^{23}$ e $z_2 = \sqrt{2}\, e^{i\alpha}$.

Determine os valores de $\alpha \in \left]0, \pi\right[$, para os quais o número complexo $z = \dfrac{z_1}{z_2^2}$ é um número imaginário puro.

3

Na figura 4, está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, o cubo $[OABCDEFG]$ de aresta 3.

Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao semieixo positivo Ox;
- o ponto C pertence ao semieixo negativo Oy;
- o ponto D pertence ao semieixo positivo Oz;
- o ponto H pertence ao segmento de reta $[EF]$;
- o plano ACH é definido pela equação

$$3x - 3y - 2z = 9$$

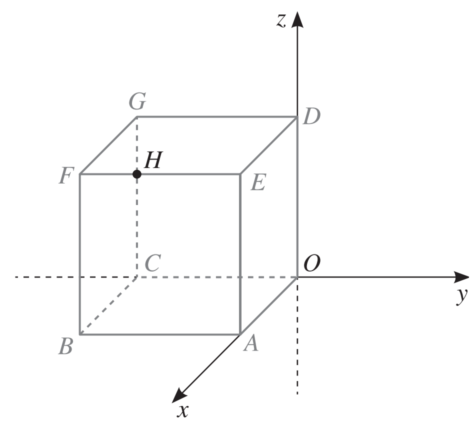


Fig. 4

3.1 Justifique que o ponto H tem coordenadas $(3, -2, 3)$.

3.2 Escreva uma equação vetorial da reta perpendicular ao plano ACH no ponto H.

3.3 Seja α a amplitude, em radianos, do ângulo AHC.

Determine o valor exato de $\sin^2 \alpha$.

4

Admita que a temperatura, T, em graus Celsius, de um café após ter sido servido é dada em função do tempo, t, em minutos, pela função:

$$T(t) = a \times 2^{-0{,}2t} + 20$$

4.1 Determine o valor de a, sabendo que no instante em que foi servido a temperatura do café era de $80\ °C$.

4.2 Uma pessoa que goste de beber café à temperatura de $50\ °C$, quantos minutos vai ter de esperar após o mesmo ser servido?

4.3 Mostre que o café atinge uma temperatura $T > 20$ no instante

$$t = 5 \log_2\left(\frac{60}{T - 20}\right)$$

5

Seja f uma função contínua num intervalo $I \subset D_f$.

Mostre que, se a, $b \in I$, $a < b$, então, $\dfrac{f(a) + f(b)}{2} \in f(I)$.

COTAÇÕES (Caderno 2)										
Grupo	**Item — Cotações (em pontos)**									
I	**1 a 8** **8 × 5 pontos**									**40**
II	**1**	**2**	**3.1**	**3.2**	**3.3**	**4.1**	**4.2**	**4.3**	**5.1**	
	16	18	10	5	15	8	14	10	14	**110**
									Total	**150**

Caderno 1 40 minutos

É PERMITIDA A UTILIZAÇÃO DE CALCULADORA GRÁFICA.

Na resposta aos itens deste caderno, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1

Uma caixa tem 12 bolas, indistinguíveis ao tato, numeradas de 1 a 12.

1.1 Retiram-se, ao acaso, uma a uma, sucessivamente e sem reposição, todas as bolas da caixa.

Determine o número de sequências diferentes que é possível formar, de modo que as bolas com os números 1, 2 e 3 fiquem juntas (não necessariamente por esta ordem).

1.2 Determine a probabilidade de, ao retirar, ao acaso, quatro das 12 bolas, obter pelo menos duas bolas com número par.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

2

Considere a função f, de domínio $\left]0, \frac{3\pi}{2}\right[$, definida por:

$$f(x) = \sin x + \ln x$$

Sabe-se que:

- P é um ponto do gráfico de f;
- a reta de equação $y = -\frac{x}{2}$ é perpendicular à reta tangente ao gráfico de f no ponto P.

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, a abcissa do ponto P.

Na sua resposta, deve:

- equacionar o problema;
- reproduzir o gráfico da função, ou os gráficos das funções, que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- indicar a abcissa do ponto P com arredondamento às centésimas.

COTAÇÕES (Caderno 1)			
Item — Cotações (em pontos)			Total
1.1	1.2	2.1	
10	15	20	45 pontos

Caderno 2 110 minutos

NÃO É PERMITIDA A UTILIZAÇÃO DE CALCULADORA GRÁFICA.

Grupo I

Na resposta aos itens deste grupo, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

1

Considere a linha do triângulo de Pascal em que o segundo elemento é igual a 14.

O maior elemento dessa linha é igual a:

(A) ${}^{14}C_6$ **(B)** ${}^{14}C_7$ **(C)** ${}^{15}C_6$ **(D)** ${}^{15}C_7$

2

Na figura 1, está representada, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico de uma função f', primeira derivada de uma função f de domínio $\mathbb{R}^+$ duas vezes diferenciável.

Em qual das opções seguintes pode estar representada parte do gráfico da função f'', segunda derivada da função f?

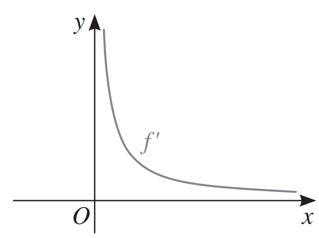
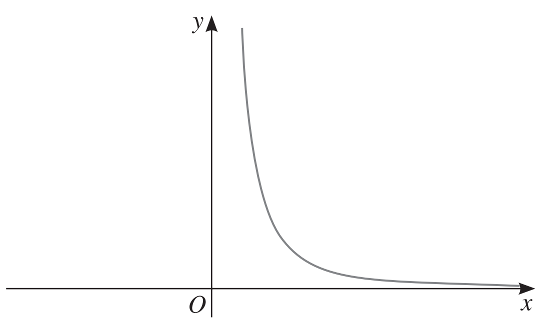
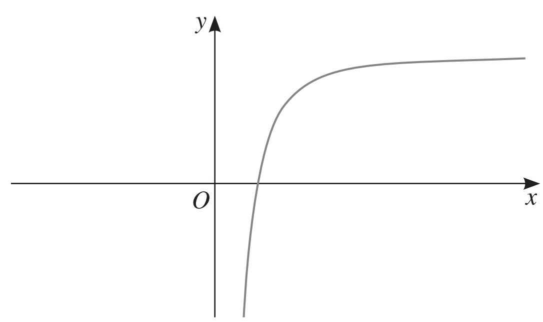


Fig. 1

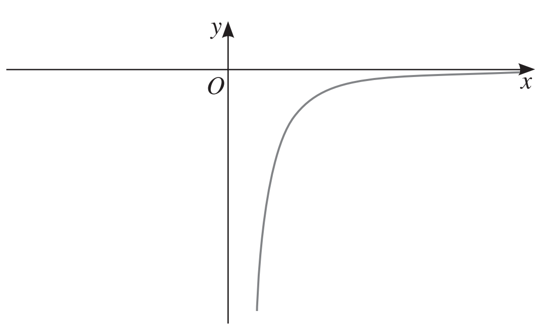
(A)



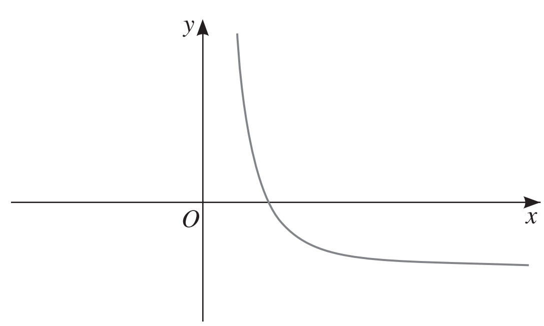
(C)



(B)



(D)



3

Para um certo número real k, positivo, seja g a função, de domínio $]-1, +\infty[$, definida por:

$$g(x) = \begin{cases} 3 + \dfrac{2}{\ln(-x)} & \text{se } -1 < x < 0 \\ \ln(x+k) & \text{se } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Sabe-se que g é contínua. Qual é o valor de k?

(A) $\ln 3$ **(B)** 3 **(C)** e^2 **(D)** e^3

4

Na figura 2, estão representadas, num referencial o.n. xOy, a circunferência de centro em O e raio 2 e uma região sombreada.

Sabe-se que:
- os pontos A, B e C pertencem à circunferência;
- o ponto A pertence ao eixo Oy e os pontos B e D pertencem ao eixo Ox;
- a reta CD é perpendicular ao eixo Ox;
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo COD, com $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Qual das expressões seguintes representa, em função de α, a área da região sombreada?

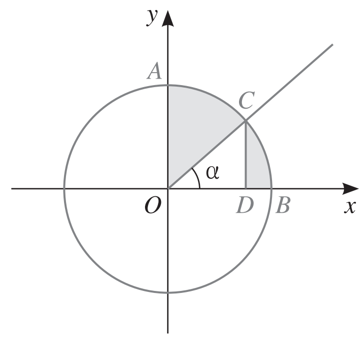


Fig. 2

(A) $\dfrac{\pi - \sin(2\alpha)}{4}$

(B) $\pi - \sin(2\alpha)$

(C) $\dfrac{\pi - \sin(2\alpha)}{2}$

(D) $\dfrac{\pi - 2\sin(2\alpha)}{4}$

5

Na figura 3, está representada, a sombreado, no plano complexo, parte de uma coroa circular.

Sabe-se que:
- O é a origem do referencial;
- as circunferências têm centro na origem e raios iguais a 1 e 2;
- a reta r é a bissetriz dos quadrantes ímpares.

Qual das condições seguintes pode definir, em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, a região a sombreado, incluindo a fronteira?

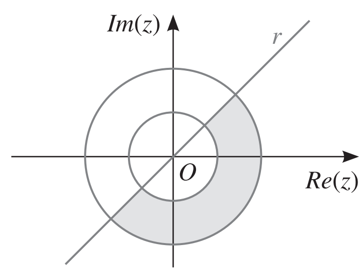


Fig. 3

(A) $1 \leqslant |z| \leqslant 2 \wedge Re(z) \leqslant Im(z)$

(B) $1 \leqslant |z| \leqslant 2 \wedge -\dfrac{3\pi}{4} \leqslant Arg(z) \leqslant \dfrac{\pi}{4}$

(C) $1 \leqslant |z| \leqslant 4 \wedge Re(z) \geqslant Im(z)$

(D) $1 \leqslant |z| \leqslant 4 \wedge -\dfrac{3\pi}{4} \leqslant Arg(z) \leqslant \dfrac{\pi}{4}$

6

Considere as sucessões (a_n) e (b_n) de termos gerais:

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \text{ e } b_n = n^3 e^{-n}$$

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) $\lim(a_n) = 1$ e $\lim(b_n) = +\infty$

(B) $\lim(a_n) = 1$ e $\lim(b_n) = 0$

(C) $\lim(a_n) = 0$ e $\lim(b_n) = +\infty$

(D) $\lim(a_n) = 0$ e $\lim(b_n) = 0$

7

Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, os pontos A e B de coordenadas $(2, 3, 0)$ e $(-1, 2, 0)$, respetivamente.

Seja C um ponto pertencente ao eixo das abcissas, tal que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 2$.

Então, as coordenadas do ponto C são:

(A) $(-1, 0, 0)$

(B) $(1, 0, 0)$

(C) $(2, 0, 0)$

(D) $(3, 0, 0)$

8

Num referencial o.n. $Oxyz$, sejam α e β os planos definidos pelas equações

$$\alpha: x + y - z = 1 \text{ e } \beta: 2x + 2y + 2z = 1$$

A interseção dos planos α e β é:

(A) o conjunto vazio.

(B) uma reta.

(C) um ponto.

(D) um plano.

Grupo II

Na resposta aos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1

Um saco tem rebuçados de mentol e de laranja, distinguíveis apenas pelo sabor.

Sabe-se que um terço dos rebuçados é de mentol.

Extraindo, ao acaso, sucessivamente e sem reposição, dois rebuçados do saco, a probabilidade de ambos serem de laranja é igual a $\frac{5}{12}$.

Determine o número total de rebuçados contidos no saco.

2

Mostre que as soluções, em $\mathbb{C}$, da equação

$$z^2 - 6z + 25 = 0$$

são números complexos cujos afixos pertencem, no plano complexo, à circunferência de centro na origem e raio igual a 5.

3

Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = xe^{2-x}$$

3.1 Estude a função f quanto à existência de assíntotas horizontais ao seu gráfico.

3.2 Mostre que a função f tem um único máximo relativo e determine-o.

4

Seja h uma função cuja derivada h', de domínio $\mathbb{R}$, é dada por:

$$h'(x) = x + \cos(2x)$$

4.1 Determine o valor de $\lim\limits_{x \to \frac{5\pi}{6}} \dfrac{h\left(\frac{5\pi}{6}\right) - h(x)}{6x - 5\pi}$.

4.2 Estude o gráfico da função h quanto ao sentido das concavidades e quanto à existência de pontos de inflexão em $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Na sua resposta, deve indicar o(s) intervalo(s) onde o gráfico da função h tem concavidade voltada para cima, o(s) intervalo(s) onde o gráfico da função h tem a concavidade voltada para baixo e, caso existam, as abcissas dos pontos de inflexão do gráfico da função h.

4.3 Mostre que existe um ponto A, de abcissa pertencente ao intervalo $[0, \pi]$, tal que a reta tangente ao gráfico de h em A tem declive igual a 2.

5

Na figura 4, está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, o octaedro $[ABCDEF]$.

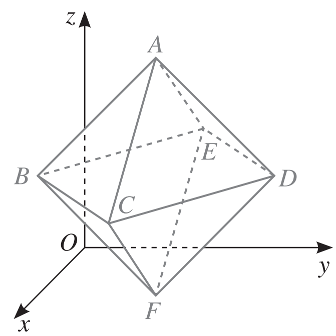


Fig. 4

Sabe-se que:

- a reta AB é definida pela equação

$$(x, y, z) = (1, 0, 1) + k(0, 1, 1), k \in \mathbb{R}$$

- a reta AE é definida pela equação

$$(x, y, z) = (0, 1, 1) + k(1, 0, 1), k \in \mathbb{R}$$

5.1 Mostre que o ponto A tem coordenadas $(1, 1, 2)$.

5.2 Determine uma equação do plano ABE.

COTAÇÕES (Caderno 2)										
Grupo	Item — Cotações (em pontos)									
I	1 a 8 8 × 5 pontos									40
II	1	2	3.1	3.2	4.1	4.2	4.3	5.1	5.2	
	15	12	12	15	10	15	12	10	14	115
									Total	155

Caderno 1 — 40 minutos

É PERMITIDA A UTILIZAÇÃO DE CALCULADORA GRÁFICA.

Na resposta aos itens deste caderno, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1

Uma companhia de teatro leva a cena uma nova peça.

Dos atores que participam na peça, sabe-se que:

- $80\ \%$ são atores residentes da companhia;
- $60\ \%$ são mulheres;
- $30\ \%$ dos homens são atores convidados.

Escolhe-se, ao acaso, um ator que participa na peça.

Qual é a probabilidade de o ator escolhido ser mulher, sabendo que é convidado?

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

2

Considere a função f de domínio $[0, \pi]$ definida por:

$$f(x) = e^x + \sin\left(\frac{x}{2}\right) - x^2$$

2.1 Prove, utilizando o teorema de Bolzano-Cauchy, que existe um ponto B do gráfico de f em que a reta tangente ao mesmo é paralela à reta de equação $y = 6x$.

2.2 Utilize a calculadora gráfica para determinar as coordenadas do ponto B referido na alínea anterior.

Na sua resposta, deve:

- equacionar o problema;
- reproduzir o gráfico da função, ou os gráficos das funções, que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- indicar as coordenadas do ponto B arredondadas às centésimas.

Nota: Nos cálculos intermédios, deve conservar no mínimo três casas decimais.

COTAÇÕES (Caderno 1)			
Item — Cotações (em pontos)			Total
1	2.1	2.2	
15	15	15	45 pontos

Caderno 2 110 minutos

NÃO É PERMITIDA A UTILIZAÇÃO DE CALCULADORA GRÁFICA.

Grupo I

Na resposta aos itens deste grupo, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

1

Um código é formado por cinco caracteres dos quais três são algarismos e os outros dois são vogais.

Quantos códigos diferentes é possível formar, tais que os algarismos e as vogais sejam dispostos de forma alternada e não haja repetição de algarismos?

(A) ${}^{10}A_3 \times {}^{5}A_2$ **(B)** $10^5 \times 5^2$ **(C)** ${}^{10}A_3 \times 5^2$ **(D)** ${}^{10}C_3 \times {}^{5}A_2$

2

Do desenvolvimento de $(x^3 - 1)^7$ resulta um polinómio reduzido.

Selecione, de entre os termos seguintes, o termo de grau 6 desse polinómio.

(A) $-21x^6$ **(B)** $-7x^6$ **(C)** $7x^6$ **(D)** $21x^6$

3

Na figura 1, está representado, em referencial cartesiano, o gráfico de uma função f duas vezes diferenciável de domínio $]-3, 3[$.

Em qual das opções seguintes pode estar representado o gráfico da função f'' , derivada de segunda ordem da função f ?

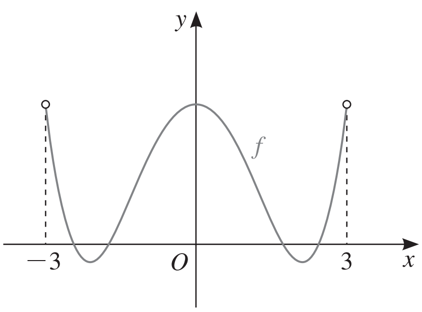
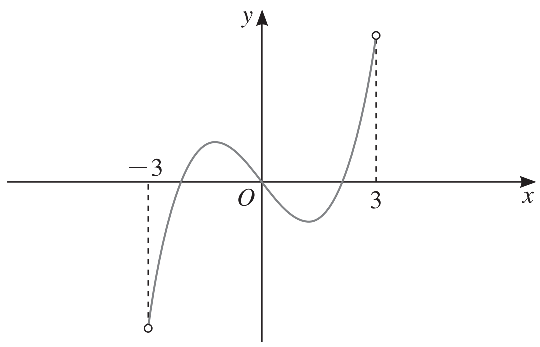
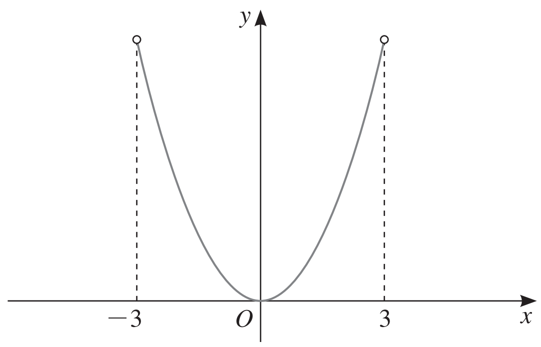


Fig. 1

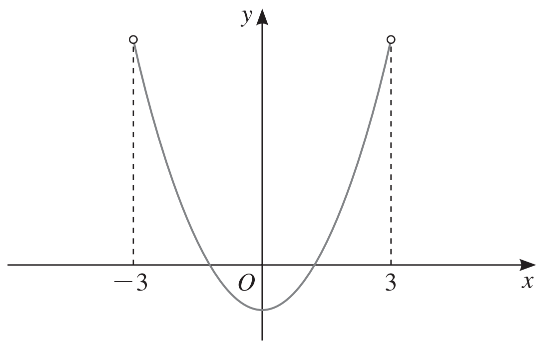
(A)



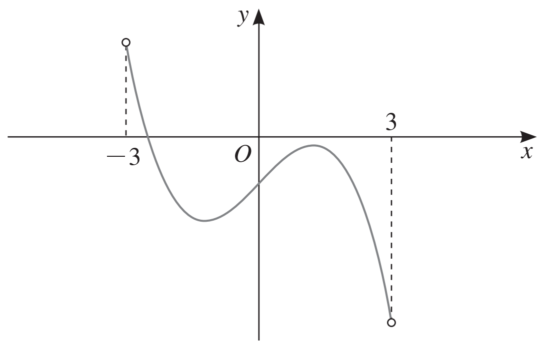
(C)



(B)



(D)



4

Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$.

Sabe-se que -1 é um zero da função f.

Seja g a função de domínio $\mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(x-3) + 2$.

Qual dos seguintes pontos pertence, garantidamente, ao gráfico de g?

(A) $(-4, 2)$ **(B)** $(2, 2)$ **(C)** $(2, 0)$ **(D)** $(-4, 1)$

5

Considere a sucessão (u_n) de termo geral

$$u_n = \left(\frac{n+2}{n-2}\right)^{2n}$$

e a função de domínio $\mathbb{R}^+$ definida por $f(x) = \frac{1}{2}\ln x$.

Qual é o valor de

$$\lim f(u_n)\ ?$$

(A) e^4 **(B)** 8 **(C)** e^2 **(D)** 4

6

Na figura 2, está representada uma circunferência de centro O e raio 2.

Os pontos A e B são extremos de um diâmetro da circunferência.

Considere um ponto P, que, partindo de A, se desloca sobre o arco AB, terminando o seu percurso em B.

Seja x a amplitude, em radianos, do ângulo AOP.

Considere a função de domínio $[0, \pi]$ que a cada valor de x faz corresponder o valor do produto escalar $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP}$.

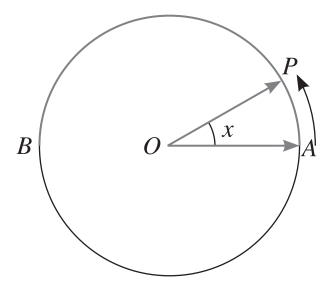


Fig. 2

Qual das seguintes expressões pode definir a função f?

(A) $f(x) = 2\cos x$

(B) $f(x) = 4\cos x$

(C) $f(x) = 2\sin(2x)$

(D) $f(x) = 4\sin x$

7

Em qual das seguintes opções estão duas raízes quartas do mesmo número complexo?

(A) $e^{i\frac{\pi}{6}}$ e $e^{i\frac{5\pi}{6}}$

(B) $e^{i\frac{\pi}{6}}$ e $e^{i\frac{5\pi}{3}}$

(C) $e^{i\frac{\pi}{4}}$ e $e^{i\frac{5\pi}{4}}$

(D) $e^{i\frac{\pi}{3}}$ e $e^{i\frac{2\pi}{3}}$

8

Na figura 3, está representado, no plano complexo, um quadrado cujo centro coincide com a origem e em que cada lado é paralelo a uma das bissetrizes dos quadrantes. Os vértices deste quadrado são os afixos dos números complexos z_1, z_2, z_3 e z_4.

Qual das seguintes proposições é falsa?

(A) $|z_1 - z_3| = |z_2 - z_4|$

(B) $Re(z_4) = Im(z_1)$

(C) $i\,\bar{z}_3 = z_2$

(D) $\frac{z_2}{i} = z_3$

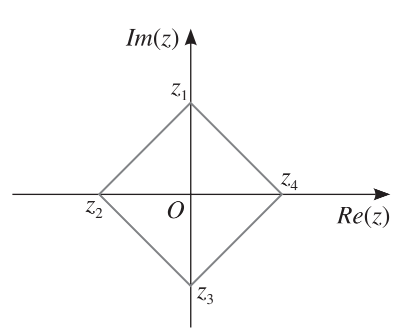


Fig. 3

Grupo II

Na resposta aos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1

Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos; i designa a unidade imaginária.

Determine:

$$\frac{(2-i)^2 - 1 + 6i^{37}}{1-i}$$

Apresente o resultado na forma $a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$.

2

Seja E um conjunto finito , P uma probabilidade em $\mathcal{P}(E)$ e A , $B \in \mathcal{P}(E)$.

Prove que:

Se A e B são acontecimentos independentes, então, $P(A \cup B) - P(A) \times P(\overline{B}) = P(B)$.

3

Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - e^2}{4 - 2x} & \text{se } x < 2 \\ (x-2)\ln x & \text{se } x \geqslant 2 \end{cases}$$

3.1 Estude f quanto à existência de assíntotas ao seu gráfico.

3.2 Estude a restrição de f ao intervalo $[2, +\infty[$ quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

4

Na figura 4, está representado um referencial o.n. do espaço $Oxyz$ e, neste, um tetraedro regular $[ABCD]$.

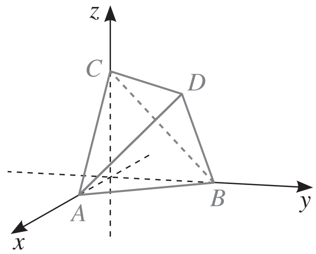


Fig. 4

Sabe-se que:

- o ponto D tem coordenadas $(2, 2, 2)$;
- o plano ABC é definido pela equação $x + y + z = 2$.

4.1 Escreva a equação reduzida da superfície esférica de centro em D tangente ao plano xOz .

4.2 Mostre que a projeção ortogonal do ponto D sobre o plano ABC tem coordenadas $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

4.3 Escreva uma equação vetorial da reta de interseção dos planos ABC e BCD .

5

Considere a função definida por $f(x) = \sin(\pi x) - \cos(\pi x)$.

5.1 Determine uma expressão geral para as soluções da equação $f(x) = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

5.2 Mostre que existe $\alpha \in \mathbb{R}$, tal que, para todo o $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = -\alpha f(x)$, indicando o valor de α .

COTAÇÕES (Caderno 2)										
Grupo	Item — Cotações (em pontos)									
I	1 a 8 8 × 5 pontos									40
II	1	2	3.1	3.2	4.1	4.2	4.3	5.1	5.2	
	15	15	16	15	5	12	10	15	12	115
									Total	155

Caderno 1 — 40 minutos

É PERMITIDA A UTILIZAÇÃO DE CALCULADORA GRÁFICA.

Na resposta aos itens deste caderno, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1

A Patrícia dispõe de 12 cartas todas diferentes: quatro cartas do naipe de espadas, quatro cartas do naipe de copas e quatro cartas do naipe de ouros.

Fig. 1

1.1 Vai dispor essas 12 cartas, sobre uma mesa, lado a lado, da esquerda para a direita, de modo a formar uma sequência com as 12 cartas.

Pretende que as duas primeiras e as duas últimas cartas da sequência sejam todas do naipe de espadas, e que as cartas do naipe de copas fiquem todas juntas.

Quantas sequências diferentes, nestas condições, pode a Patrícia fazer?

1.2 Considere, uma vez mais, as cartas da Patrícia com a sua constituição inicial.

A Patrícia baralhou as cartas e retirou, simultaneamente e ao acaso, três cartas.

Determine a probabilidade de, nessas três cartas, existirem pelo menos duas do naipe de espadas. Apresente o resultado na forma de percentagem com arredondamento às unidades.

2

Admita que o número de abelhas de um determinado tipo, N, evolui em função do tempo, t, em dias, de acordo com a função:

$$N(t) = N_0 \, e^{kt} \quad (t \geqslant 0)$$

em que:

- N_o representa o número de abelhas desse tipo no instante inicial $(N_0 > 0)$;
- k é uma constante real.

Fig. 2

2.1 Considere que, numa determinada colmeia, ao fim de 15 dias, contados a partir de um instante inicial, o número de abelhas operárias da população duplica.

Determine o valor de k, arredondado às milésimas.

2.2 Admita que um determinado apicultor decide criar uma colmeia de abelhas.

Para tal constrói a colmeia com 10 000 abelhas operárias, 1000 zângões e algumas abelhas-rainhas.

Os valores da constante k para cada um dos dois tipos de abelhas, operárias e zângões, são: $-0{,}15$ e $0{,}04$, respetivamente.

Durante os primeiros 80 dias, houve um momento em que o número total de abelhas, operárias e zângões, existentes na colmeia, atingiu o valor de 20 000 .

Recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora, determine o dia e a hora em que tal aconteceu (hora arredondada às unidades).

Apresente, na sua resposta:

- a expressão da função que dá o número total de abelhas (operárias e zângões), existentes na colmeia, em função do tempo;
- o gráfico dessa função para $t \in [0, 80]$, no qual deve estar devidamente assinalado o ponto necessário à resolução do problema.

COTAÇÕES (Caderno 1)				
Item — Cotações (em pontos)				Total
1.1	1.2	2.1	2.2	
10	10	15	15	**50**

Caderno 2 110 minutos

NÃO É PERMITIDA A UTILIZAÇÃO DE CALCULADORA GRÁFICA.

Grupo I

Na resposta aos itens deste grupo, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

1

Considere a linha do triângulo de Pascal em que a soma do segundo com o penúltimo elemento é igual a 30 .

Qual é a probabilidade de escolher, ao acaso, um elemento dessa linha que seja superior a 200 ?

(A) $\frac{5}{8}$

(B) $\frac{7}{15}$

(C) $\frac{9}{16}$

(D) $\frac{3}{5}$

2

Seja k um número real.

Considere as sucessões (u_n) e (v_n) definidas, respetivamente, por:

$$u_n = \frac{2n - 1}{n} \quad \text{e} \quad v_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{kn}$$

O valor de k , de forma que $\lim u_n = \lim v_n$, é:

(A) 0

(B) $\ln 2$

(C) 1

(D) $\ln \sqrt{2}$

3

Indique o conjunto dos números reais que são soluções da inequação:

$$\log(x + 5) \leqslant 1$$

(A) $[-5, 5[$

(B) $]-5, 5]$

(C) $]-\infty, 5]$

(D) $[5, +\infty[$

4

A reta de equação $y + x + 1 = 0$ pode ser tangente a uma das funções seguintes. Qual?

(A) $f(x) = \sin x$

(B) $f(x) = \cos x$

(C) $f(x) = -\ln x$

(D) $f(x) = -e^x$

5

Seja f a função de domínio $]0, \pi[$, definida por $f(x) = e^{\frac{1}{\cos(2x) - 1}}$.

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) O gráfico da função f tem assíntotas verticais.

(B) O gráfico da função f tem assíntotas horizontais.

(C) A função f não tem mínimo absoluto.

(D) A equação $f(x) = \frac{1}{3}$ tem solução em $\left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right[$.

6

Considere o seguinte integral definido:

$$\int_{-1}^{2} \frac{x}{(x^2 + 1)^2} dx$$

O valor do integral considerado é:

(A) $-\frac{1}{10}$ **(B)** $\frac{1}{4}$ **(C)** $\frac{3}{20}$ **(D)** $\frac{1}{5}$

7

Considere, no referencial ortonormado $Oxyz$, o plano α, definido por:

$$x + y - z = 2$$

Uma equação vetorial da reta perpendicular ao plano α, que passa na origem do referencial, é:

(A) $(x, y, z) = (1, 1, 1) + k(1, 1, -1), k \in \mathbb{R}$

(B) $(x, y, z) = (1, 1, -1) + k(-1, -1, 1), k \in \mathbb{R}$

(C) $(x, y, z) = (1, 1, -1) + k(2, -1, 1), k \in \mathbb{R}$

(D) $(x, y, z) = (0, 0, 0) + k(1, -1, 1), k \in \mathbb{R}$

8

Seja z o número complexo, definido por:

$$z = \frac{(1 + 2i)(3 - i) + 10i^{15}}{2 - i}$$

A parte real de z é:

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3

Grupo II

Na resposta aos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1

Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere:

$$z_1 = -\sqrt{3} + i \text{ e } z_2 = \frac{1}{2} e^{-i\frac{4\pi}{5}}$$

Determine o menor valor de n natural para o qual $(z_1 \times z_2)^n$ seja um número real negativo.

2

Seja E um conjunto finito, P uma probabilidade em $\mathcal{P}(E)$ e A e B dois acontecimentos em $\mathcal{P}(E)$.
Mostre que, se A e B são dois acontecimentos independentes, então:

$$P(A \cup \overline{B}) + P(\overline{A}) \times P(B) = 1$$

3

Na figura 3, está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, o cubo $[OABCDEFG]$ de aresta 4.

Sabe-se que:

- o vértice O do cubo coincide com a origem do referencial;
- os vértices A, C e D do cubo pertencem aos semieixos positivos Ox, Oy e Oz, respetivamente;
- o triângulo $[BKL]$ está contido no plano α de equação $4x + 2y + z = 24$.

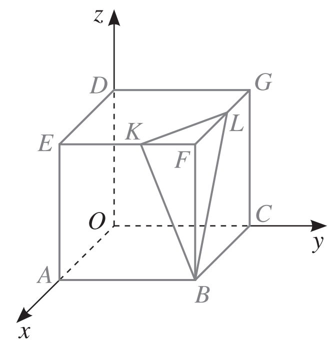


Fig. 3

3.1 Escreva um sistema de equações paramétricas que defina o plano que passa por D e é paralelo ao plano α.

3.2 Sendo β a amplitude do ângulo BLK, determine o valor de $\sin(2\beta)$.

4

Seja k uma constante real e f uma função duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}\backslash\{1\}$, cuja derivada, f', é definida por:

$$f'(x) = \begin{cases} k + 1 + xe^x & \text{se } x \leqslant 0 \\ \dfrac{x}{\ln x} & \text{se } x > 0 \wedge x \neq 1 \end{cases}$$

4.1 Determine o valor de k.

4.2 Mostre que existe um ponto do gráfico da função f em $[e, e^2]$ cujo declive da reta tangente é 3.

4.3 Estude a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão, em $\mathbb{R}^-$.

Na sua resposta, apresente:

- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima;
- a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de f.

5

Considere a função g, de domínio $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, definida por:

$$g(x) = x - \frac{1}{2}\tan x$$

Estude a monotonia de g e a existência de extremos relativos.

COTAÇÕES (Caderno 2)									
Grupo	Item — Cotações (em pontos)								
I	1 a 8 8 × 5 pontos								40
II	1	2	3.1	3.2	4.1	4.2	4.3	5	
	15	15	10	15	5	10	15	15	110
								Total	150

Caderno 1

40 minutos

É PERMITIDA A UTILIZAÇÃO DE CALCULADORA GRÁFICA.

Na resposta aos itens deste caderno, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1

Na figura 1, estão representados, num referencial o.n. $Oxyz$, uma pirâmide e um cubo, em que a altura da pirâmide é igual à medida da aresta do cubo.

Três das faces do cubo pertencem aos planos coordenados e a base da pirâmide coincide com uma das faces do cubo, paralela ao plano xOy.

Os vértices A, C e D pertencem, respetivamente, aos eixos Ox, Oy e Oz.

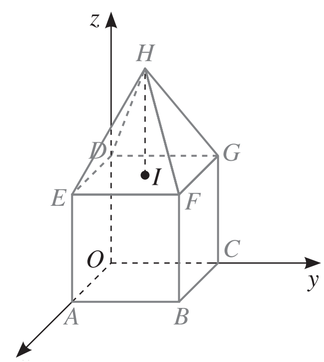


Fig. 1

1.1 Escolhem-se ao acaso quatro dos nove vértices do poliedro formado pelos dois sólidos.

Qual é a probabilidade de pelo menos três dos quatro vértices escolhidos pertencerem ao cubo e não pertencerem à pirâmide? Apresente o resultado na forma de percentagem, arredondado às unidades.

1.2 Sabendo que o vértice F tem coordenadas $(2, 2, 2)$, determine a amplitude do ângulo EOH. Apresente o resultado em graus, arredondado às unidades.

2

Em casa da Manuela, a temperatura da água para fazer um chá de camomila, em graus Celsius, t segundos após ser desligado o lume, é dada, aproximadamente, por $T(t) = 25 + 50\,e^{-kt}$ $(t \geqslant 0)$, em que k é uma constante real.

Sabendo que passados 30 segundos a temperatura do chá é de $70\ °C$, determine a temperatura deste quando a amiga da Manuela, a Elvira, o começa a tomar, 1 minuto e meio depois de o fogão ter sido desligado.

Apresente o valor da temperatura pedida, arredondado às décimas.

Se utilizar a calculadora em eventuais cálculos numéricos, sempre que proceder a arredondamentos, use quatro casas decimais.

3

Considere, num referencial o. n. xOy, a representação gráfica da função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = e^x + x - 3$, os pontos A e B e a reta r de equação $y = mx$, com $m > 0$.

Sabe-se que:

- os pontos A e B pertencem ao gráfico da função f;
- a abcissa do ponto A é o zero da função f;
- o ponto B é o ponto de interseção da reta r com o gráfico da função f;
- a área do triângulo $[OAB]$ é igual a 1 u.a.

Determine a abcissa do ponto B recorrendo à calculadora gráfica.

Na sua resposta, deve:

- equacionar o problema;
- reproduzir, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções visualizados, devidamente identificados;
- indicar a abcissa do ponto A com arredondamento às milésimas e do ponto B com arredondamento às centésimas.

COTAÇÕES (Caderno 1)				
Item — Cotações (em pontos)				Total
1.1	1.2	2	3	
10	12	14	14	50

Caderno 2 — 110 minutos

NÃO É PERMITIDA A UTILIZAÇÃO DE CALCULADORA GRÁFICA.

Grupo I

Na resposta aos itens deste grupo, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

1

O código de acesso a uma conta do *e-bank* é constituído por três letras, dois algarismos e dois caracteres de entre os seis seguintes: # , $, % , & , = , ?

Sabe-se que um código tem três «a» , dois «3» , um carácter «#» e outro carácter «%» , como, por exemplo, o código 3aa3#%a .

Quantos códigos diferentes existem nestas condições?

(A) 210 **(B)** 42 **(C)** 420 **(D)** 105

2

Seja E um conjunto finito, P uma probabilidade em $\mathcal{P}(E)$ e A , B dois acontecimentos possíveis em $\mathcal{P}(E)$.

Sabe-se que:

- $P(A) = 0{,}3$
- $P(A|B) = 0{,}4$
- $P(A \cap \overline{B}) = 0{,}2$

Qual é o valor de $P(A \cup B)$?

(A) 0,4 **(B)** 0,45 **(C)** 0,5 **(D)** 0,55

3

Seja m um número real e considere, no referencial ortonormado $Oxyz$, os planos α e β , definidos, respetivamente, por:

$$x - y + 2z = 1 \text{ e } mx - z = 3$$

O valor de m , de forma que os planos α e β sejam perpendiculares, é:

(A) -2 **(B)** -1 **(C)** 1 **(D)** 2

4

Considere a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = 1 + \ln x$ e a sucessão (u_n) definida por:

$u_n = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n$.

O valor de $\lim f(u_n)$ é:

(A) -2 **(B)** -1 **(C)** 0 **(D)** 1

5

Indique o conjunto dos números reais que é solução da inequação:

$$3^{\frac{2}{x}} - 9 \leqslant 0$$

(A) $[1, +\infty[$

(B) $]-\infty, 0[\cup [1, +\infty[$

(C) $]-\infty, -1] \cup]0, +\infty[$

(D) $]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$

6

De uma função g, de domínio $\mathbb{R}^+$, sabe-se que a sua derivada é dada por:

$$g'(x) = x - 2\ln x$$

Em qual dos conjuntos seguintes o gráfico de g tem a concavidade voltada para cima?

(A) $[2, +\infty[$ **(B)** $]0, 2]$ **(C)** $]0, 3]$ **(D)** $[1, +\infty[$

7

Seja f a função de domínio $\left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$, definida por:

$$f(x) = \ln(1 + \cos(2x))$$

A primeira derivada de f, f', pode ser definida por:

(A) $\dfrac{2\sin(2x)}{1+\cos(2x)}$ **(B)** $\dfrac{-\sin(2x)}{1+\cos(2x)}$ **(C)** $-2\tan x$ **(D)** $2\tan x$

8

Seja k um número real e z o número complexo, definido por:

$$z = \frac{1+ki}{2-i} - i^5$$

O valor de k, de forma que z seja um imaginário puro, é:

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** não existe

Grupo II

Na resposta aos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1

Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere: $z_1 = -1 + i$ e $z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{12}}$.

Determine, na forma trigonométrica, as raízes cúbicas do número complexo z, dado por:

$$z = \frac{|z_1| \times \overline{z_2}}{(z_1)^3}$$

2

Um saco contém seis bolas. Três bolas estão numeradas com o número 1, duas com o número 2 e uma com o número 3.

Tira-se, ao acaso, uma bola do saco, observa-se o número e repõe-se a bola no saco juntamente com mais cinco bolas com o mesmo número. Seguidamente, tira-se, ao acaso, uma segunda bola do saco.

Sejam A e B os acontecimentos:

A: «Sair bola com o número 2 na primeira extração»;

B: «Sair bola com o número 2 na segunda extração».

Sem aplicar a fórmula da probabilidade condicionada, indique, na forma de fração, o valor de $P(B|A)$. Numa pequena composição, explique o seu raciocínio, começando por referir o significado de $P(B|A)$ no contexto da situação descrita.

3

Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, os pontos:

$$A(1, 1, 0)\ ,\ B(-1, 0, 1)\ \text{ e }\ C(1, -2, 1)$$

Determine o volume da pirâmide cujos vértices são a origem do referencial e os pontos de interseção do plano ABC com os eixos coordenados.

Na sua resposta, apresente:

- uma equação cartesiana do plano ABC ;
- as coordenadas dos pontos de interseção do plano ABC com os eixos coordenados;
- o valor da medida do volume solicitado.

4

Seja f a função, de domínio $[-\pi, +\infty[$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 + \sin(2x) & \text{se } -\pi \leq x \leq 0 \\ \dfrac{e^{2x} - 1}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

4.1 Justifique que f é contínua.

4.2 Determine a abcissa do ponto de interseção da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1 com o eixo das abcissas.

4.3 Estude a função f quanto à monotonia e existência de extremos relativos em $[-\pi, 0[$.

5

Seja k um número real e g uma função, de domínio $\mathbb{R}^+$, que admite uma assíntota não vertical ao seu gráfico de equação $y = x + 1$.

Sabendo que:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x) - kx + \ln x}{x} = 2$$

determine o valor de k e verifique que a função h , de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por:

$$h(x) = g(x) - kx + lnx$$

não admite assíntotas não verticais ao seu gráfico.

COTAÇÕES (Caderno 2)								
Grupo	**Item — Cotações (em pontos)**							
I	**1 a 8** **8 × 5 pontos**							**40**
II	**1**	**2**	**3**	**4.1**	**4.2**	**4.3**	**5**	
	15	15	20	15	15	15	15	**110**
							Total	**150**

PROVA 1

Caderno 1

Página 3

1

1.1 Considerem-se os acontecimentos:
F: «O sócio é do sexo feminino»
X: «O sócio pratica Pilates»
De acordo com os dados do enunciado, tem-se que:

$$P(F) = P(\overline{F}) = 0{,}5\ ;\ P(X|F) = 0{,}5\ ;\ P(X|\overline{F}) = 0{,}2$$

Então, pelo teorema da probabilidade total, conclui-se que:

$$P(X) = P(F) \times P(X|F) + P(\overline{F}) \times P(X|\overline{F}) = 0{,}5 \times 0{,}5 + 0{,}5 \times 0{,}2 = 0{,}35$$

A probabilidade de o sócio praticar Pilates é igual a $35\ \%$.

1.2 Existem, neste caso, 100 homens e 100 mulheres. Para que os dois sócios escolhidos sejam do mesmo sexo, temos ou dois homens ou duas mulheres, e, então, a probabilidade pedida é igual a:

$$\frac{{}^{100}C_2 + {}^{100}C_2}{{}^{200}C_2} = \frac{99}{199}$$

2

2.1 Considere-se a função de domínio $\mathbb{R}^+$ definida por

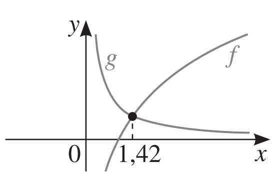
$$h(x) = f(x) - g(x) = 2 \ln x - \frac{1}{x}$$

h é contínua, pois é a diferença de funções contínuas, em particular, é contínua em $[1, 2]$.

$$h(1) = 2 \ln 1 - 1 = -1 \ \text{e}\ h(2) = 2 \ln 2 - \frac{1}{2} \approx 0{,}89$$

Então, $h(1) \times h(2) < 0$.
O corolário do teorema de Bolzano-Cauchy permite concluir que existe pelo menos um zero de h em $[1, 2]$, ou seja, existe pelo menos um ponto de interseção dos gráficos de f e de g nesse intervalo.
Como a função f é crescente e a função g é decrescente, conclui-se que esse ponto de interseção é único.

2.2 Introduzindo as expressões das funções f e g e determinando valores aproximados das coordenadas do ponto de interseção, obtêm-se as representações gráficas da figura ao lado.
Assim, a abcissa do ponto de interseção dos gráficos de f e de g é, aproximadamente, $1{,}42$.



Caderno 2

Grupo I

Página 4

1

Opção (B).
Dos 10 quadrados escolhem-se dois para colocar (por exemplo) as duas fichas azuis, obtendo-se ${}^{10}C_2$ disposições diferentes, pois as fichas são iguais. Para cada uma dessas disposições, escolhem-se dois dos oito quadrados disponíveis para colocar as duas fichas vermelhas, ou seja, ${}^{8}C_2$.
Como as seis fichas verdes ocupam os seis quadrados disponíveis, conclui-se que existem ${}^{10}C_2 \times {}^{8}C_2$ disposições diferentes.

2

Opção (B).
Fazendo o estudo do sinal, tem-se:

x	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\cup$	P.I.	$\cap$	P.I.	$\cup$

o que permite concluir a existência de dois pontos de inflexão.

3

Opção (B).

Seja $|z_1|$ o complexo de afixo A .

Então, $|z_1| = 2$, e sendo θ um argumento de z_1 , tem-se $\tan\theta = 1$, e, como A está no 1.º quadrante, conclui-se que $|z_1| = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Assim, como os complexos que têm como afixos A , B e C são as raízes cúbicas de um mesmo número complexo, tem-se que o complexo de afixo C é:

$$2e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{3}\right)} = 2e^{i\frac{19\pi}{12}}$$

4

Opção (A).

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} = \| \overrightarrow{AB} \| \times \| \overrightarrow{CA} \| \times \cos 150^\circ = a \times a \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}\,a^2}{2}$$

5

Opção (C).

O declive da reta tangente no ponto de abcissa $\frac{\pi}{10}$ é $f'\left(\frac{\pi}{10}\right)$.

$$f'(x) = 2 \times 2(\sin x)' \sin x = 2 \times 2 \cos x \sin x = 2 \sin(2x)$$

Assim, $f'\left(\frac{\pi}{10}\right) = 2\sin\left(2 \times \frac{\pi}{10}\right) = 2 \sin\frac{\pi}{5}$.

6

Opção (A).

$A_{[ABO]} = \dfrac{OB \times |\cos\alpha|}{2}$ e, como $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, $\cos\alpha < 0$, então, $A_{[ABO]} = -\frac{1}{2}\cos\alpha$.

7

Opção (B).

$$u_n = n(\ln(n+2) - \ln n) = n \ln\left(\frac{n+2}{n}\right) = \ln\left(\frac{n+2}{n}\right)^n$$

$$\lim\left[\ln\left(\frac{n+2}{n}\right)^n\right] = \ln\left[\lim\left(\frac{n+2}{n}\right)^n\right] = \ln e^2 = 2$$

8

Opção (A).

Se o perímetro é 6 , o lado do triângulo mede 2 .

$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = x$

Então, $x^2 + x^2 = 2^2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$ e $A\left(\sqrt{2}, 0, 0\right)$, $B\left(0, \sqrt{2}, 0\right)$ e $C\left(0, 0, \sqrt{2}\right)$.

Grupo II

Página 5

1

$|2-2i| = 2\sqrt{2}$, e, sendo α um argumento de $2-2i$, tem-se $\tan\alpha = -1$, e, como $\alpha \in 4.^\circ\, Q$, conclui-se que $2 - 2i = 2\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

Então, $z = \dfrac{re^{i\theta}}{2\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \dfrac{r}{2\sqrt{2}}e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}$.

Para que o afixo de z pertença à circunferência de centro na origem e raio $\sqrt{2}$, tem-se: $\dfrac{r}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

Para que o afixo de z pertença à bissetriz dos quadrantes pares, tem-se: $\theta + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Assim,

$$\frac{r}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2} \land \theta + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \land \theta \in]0,\pi[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r = 4 \land \theta = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \land \theta \in]0,\pi[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r = 4 \land \theta = \frac{\pi}{2}$$

2

$P(A) \times P(B|A) = 1 - P(\overline{A} \cup \overline{B}) \Leftrightarrow P(A) \times \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = 1 - P(\overline{A \cap B}) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A \cap B)$

3

3.1 A reta AE é perpendicular ao plano ABC, então, $\vec{u}(3, -6, 2)$ é vetor diretor de AE.
Assim, uma equação vetorial de AE é:
$(x, y, z) = (14, -7, 4) + k(3, -6, 2), k \in \mathbb{R}$
3.2 A face $[BCGF]$ está contida no plano BCG.
O vetor $\overrightarrow{AB}$ é normal ao plano BCG, então, uma equação desse plano é
$2(x - 16) + 3(y + 4) + 6(z - 10) = 0 \Leftrightarrow 2x + 3y + 6z - 80 = 0$.
Como o ponto $P(x, y, z)$ pertence ao plano BCG e ao eixo Oz,
$x = 0 \wedge y = 0 \wedge 2x + 3y + 6z - 80 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \wedge y = 0 \wedge z = \dfrac{40}{3}$
as coordenadas de P são $\left(0, 0, \dfrac{40}{3}\right)$.

4

4.1 Como a função f é contínua em $x < 1$ e em $x > 1$, apenas a reta de equação $x = 1$ poderá ser assíntota vertical ao gráfico de f.

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{e^{1-x} - 1}{(x-1)^2} \underbrace{=}_{y = 1 - x} \lim_{y \to 1^+} \frac{e^y - 1}{(-y)^2} = \lim_{y \to 1^+} \left(\frac{e^y - 1}{y} \times \frac{1}{y}\right) = 1 \times (+\infty) = +\infty$$

Então, a reta de equação $x = 1$ é a única assíntota vertical ao gráfico de f.
4.2 Para $x \in]1, +\infty[$:

$f'(x) = \ln x + \dfrac{x+4}{x}$

$f''(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{4}{x^2} = \dfrac{x-4}{x^2}$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4$

x	1		4	$+\infty$
$x - 4$	$-$	$-$	0	$+$
x^2	$+$	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	n.d.	$-$	0	$+$
f	n.d.	$\cap$	P.I.	$\cup$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $]1, 4]$ e voltada para cima em $[4, +\infty[$.
Existe um ponto de inflexão de coordenadas $(4, 8 \ln 4)$.

5

5.1 $f'(x) = 2 + 4\sin(2x)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin(2x) = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \vee 2x = \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x == -\dfrac{\pi}{12} + k\pi \vee x = \dfrac{7\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{4}\right[$

$k = 0 \to x = -\dfrac{\pi}{12}$

$k = -1 \to x = \dfrac{7\pi}{12} - \pi = -\dfrac{5\pi}{12}$

$f\left(-\dfrac{\pi}{12}\right) = -\dfrac{\pi}{6} - 2\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{\pi}{6} - 2 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = -\dfrac{\pi}{6} - \sqrt{3}$

$f\left(-\dfrac{5\pi}{12}\right) = -\dfrac{5\pi}{6} - 2\cos\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right) = -\dfrac{5\pi}{6} - 2 \times \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\dfrac{5\pi}{6} + \sqrt{3}$

Então, $A\left(-\dfrac{5\pi}{12}, -\dfrac{\pi}{6} + \sqrt{3}\right)$ e $B\left(-\dfrac{\pi}{12}, -\dfrac{\pi}{6} - \sqrt{3}\right)$.

5.2 $\beta = \arcsin\left(-\frac{1}{5}\right) \Leftrightarrow \sin\beta = -\frac{1}{5} \wedge \beta \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$.

O declive da reta tangente é igual a $f'(\beta)$.

$f'(x) = 2 + 4\sin(2x)$ e assim $f'(\beta) = 2 + 4\sin(2\beta) = 2 + 8\sin\beta\cos\beta$

$\cos^2\beta = 1 - \left(-\frac{1}{5}\right)^2 \Leftrightarrow \cos\beta = \pm\frac{2\sqrt{6}}{5}$

Como $\beta \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$, $\cos\beta = \frac{2\sqrt{6}}{5}$.

Então, $f'(\beta) = 2 + 8 \times \left(-\frac{1}{5}\right) \times \frac{2\sqrt{6}}{5} = 2 - \frac{16\sqrt{6}}{25}$.

PROVA 2

Caderno 1

Página 7

1

Utilizando os dados do problema e a propriedade da união de acontecimentos, tem-se:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow \frac{17}{25} = 4P(B) - \frac{1}{5} \Leftrightarrow P(B) = \frac{\frac{22}{25}}{4} = \frac{11}{50}$$

e $P(A) = 3P(B) = \frac{33}{50}$.

Assim,

$P(A) \times P(B) = \frac{363}{2500} \neq P(A \cap B)$.

Concluindo-se, assim, que A e B não são independentes.

2

2.1 $f(4) = 80(e^{-0,4 \times 4} - e^{-1,2 \times 4}) \approx 15,5$ mg/L

2.2 A função derivada de f é definida por $f'(t) = 80(-0,4e^{-0,4t} + 1,2e^{-1,2t})$

$f'(t) \geqslant 0 \Leftrightarrow 80(-0,4e^{-0,4t} + 1,2e^{-1,2t}) \geqslant 0 \Leftrightarrow -0,4e^{-0,4t} + 1,2e^{-1,2t} \geqslant 0$

$\Leftrightarrow 1,2e^{-1,2t} \geqslant 0,4e^{-0,4t} \Leftrightarrow \frac{e^{-1,2t}}{e^{-0,4t}} \geqslant \frac{0,4}{1,2} \Leftrightarrow e^{-0,8t} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow -0,8t \geqslant \ln\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow 0,8t \leqslant \ln 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t \leqslant \frac{5}{4}\ln 3$.

Então, f é crescente em $\left[0, \frac{5}{4}\ln 3\right]$, decrescente em $\left[\frac{5}{4}\ln 3, +\infty\right[$ e tem máximo em $\frac{5}{4}\ln 3$, ou seja, a quantidade de substância ativa atinge o valor máximo 1,4 horas após a administração do medicamento.

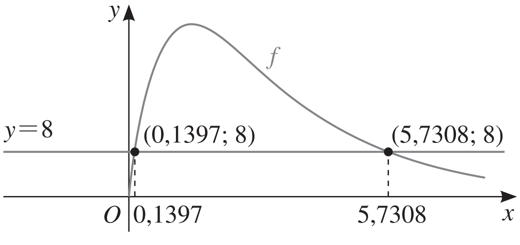
2.3 Os valores arredondados às décimas de milésimas das soluções da equação

$$f(t) = 8$$

são 0,1397 e 5,7308.

Como $5,7308 - 0,1397 = 5,5911$,

a substância mantém-se eficaz durante 5 horas e 35 minutos ($0,5911 \times 60 = 35,466$).



Caderno 2

Grupo I

Página 8

1

Opção (A)

Sabe-se que existem $6!$ sequências distintas com seis números distintos. Destas, existem $5 \times 2 \times 4! = 5! \times 2$, nas quais os múltiplos de 3 juntas ficam juntos (3 e 6).

Assim, o número de sequências distintas em que os múltiplos de 3 não ficam juntos é

$$6! - 5! \times 2$$

2

Opção (D).

Na representação gráfica de f', observa-se que, no intervalo $[-2, 1[$ se tem $f'(x) > 0$, pelo que f é crescente nesse intervalo. Então, $f(0) > f(-1) = 4$. Portanto, o único valor possível para $f(0)$ é 6.

3

Opção (D).

$$\log_2(a^5 \times b) = \log_2 a^5 + \log_2 b = 5 \log_2 a + \frac{1}{\log_b 2} = 5 \times \frac{1}{3} + \frac{4}{3} = \frac{5}{3} + \frac{4}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

4

Opção (B).

$|5 - 12i| = \sqrt{25 + 144} = 13$

$$w = \frac{\overline{i \times z^2}}{z} = \frac{e^{-\frac{i\pi}{2}} \times 13^2 e^{i(-2\alpha)}}{13e^{i\alpha}} = 13e^{i\left(-3\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}$$

5

Opção (A).

$$\int (2 + \sin(2x))\,dx = 2x - \frac{1}{2}\cos(2x) + C,\ C \in \mathbb{R}$$

Como

$$f(0) = 3 \Leftrightarrow 0 - \frac{1}{2} \times 1 + C = 3 \Leftrightarrow C = \frac{7}{2}$$

Então,

$$f(x) = 2x + \frac{7}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$$

6

Opção (B).

Como

$$\lim x_n = 1 \text{ e } \lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x - 1} \underset{y = \log_2 x}{=} \lim_{y \to 0} \frac{y}{2^y - 1} \underset{z = y \ln 2}{=} \frac{\frac{1}{\ln 2}}{\lim\limits_{z \to 0} \frac{e^z - 1}{z}} = \frac{\frac{1}{\ln 2}}{1} = \frac{1}{\ln 2} = \log_2 e,$$

por definição de limite de uma função num ponto, tem-se:

$$\lim \frac{f(x_n)}{x_n - 1} = \log_2 e$$

7

Opção (D).

$$\frac{i^{8n}}{i^{4n+1}} - \frac{1}{i^2} = \frac{(i^4)^{2n}}{(i^4)^n \times i} - \frac{1}{-1} = \frac{1^{2n}}{i} + 1 = 1 - i \text{ que só pode ser } w_4 .$$

8

Opção (C).

No referencial, as coordenadas de P são $(2 \cos x, 2 \sin x)$.

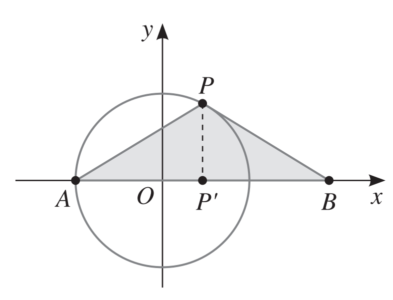
A projeção ortogonal de P, P', sobre o eixo Ox, tem coordenadas $(2 \cos x, 0)$, pelo que $\overline{AP'} = 2 + 2 \cos x$.

Como o triângulo é isósceles, P' é o ponto médio de $[AB]$. Então,

$$\overline{AB} = 2\overline{AP'} = 2(2 + 2 \cos x)$$

Como a altura do triângulo $[ABP]$ é dada em função de α por $\overline{P'P} = 2 \sin \alpha$, a área do triângulo é:

$$\frac{4(2 + 2 \cos \alpha) \sin \alpha}{2} = 4 \sin \alpha + 4 \sin \alpha \cos \alpha = 4 \sin \alpha + 2 \sin(2\alpha)$$



Grupo II

Página 9

1

Dada uma experiência aleatória cujos casos possíveis sejam equiprováveis, define-se probabilidade de um acontecimento A como o quociente entre o número de casos favoráveis a A e o número de casos possíveis.

Para se obter uma função injetiva de A em B, escolhe-se um subconjunto de B com quatro elementos (o mesmo cardinal que A) e estabelece-se entre os dois uma correspondência biunívoca. Assim, o número de funções injetivas de A em B é igual ao número de sequências de quatro elementos distintos escolhidos de B, ou seja, ${}^6A_4$, sendo este o número de casos possíveis da experiência em causa.
Para que o contradomínio da função seja A, é necessário que os quatro elementos da sequência pertençam a $A \subset B$; como existem $4!$ sequências nestas condições, este é o número de casos favoráveis.
Fica, assim, justificado o resultado apresentado:

$$\frac{4!}{{}^6A_4}$$

2

$z_1 = -\sqrt{3} + i^{23} = -\sqrt{3} + i^{4 \times 5 + 3} = -\sqrt{3} + i^3 == -\sqrt{3} - i$

Então, $|z_1| = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = 2$ e um argumento θ de z_1 é tal que θ pertence ao terceiro quadrante e $\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Assim, pode escrever-se $z_1 = 2e^{i\frac{7\pi}{6}}$

$z_2^2 = \left(\sqrt{2}\,e^{i\alpha}\right)^2 = 2e^{i\,2\alpha}$

Então,

$$z = \frac{z_1}{z_2^2} = \frac{2e^{i\frac{7\pi}{6}}}{2e^{i\,2\alpha}} = e^{i\left(\frac{7\pi}{6} - 2\alpha\right)}$$

Portanto, z é um imaginário puro se, e somente se:

$\frac{7\pi}{6} - 2\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 2\alpha = \frac{2\pi}{3} - k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} - \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

Atribuindo a k os valores $-2, -1, 0$ e 1, obtém-se:

$$\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \text{ e} -\frac{\pi}{6}$$

Portanto, os valores de $\alpha \in \left]0, \pi\right[$, para os quais o número complexo $z = \frac{z_1}{z_2^2}$ é um número imaginário puro, são $\frac{5\pi}{6}$ e $\frac{\pi}{3}$.

3

3.1 O ponto H pertence à reta FE, paralela ao eixo Oy, que passa no ponto $E(3, 0, 3)$, que pode ser definida pela condição $x = 3 \wedge z = 3$, e ao plano de equação

$$3x - 3y - 2z = 9$$

Assim, tem-se H, que tem abcissa e cota 3 e ordenada y, é tal que $3 \times 3 - 3y - 2 \times 3 = 9$, ou seja, $y = -2$. Portanto, as coordenadas de H são $(3, -2, 3)$.

3.2 Como a reta é perpendicular ao plano, qualquer vetor normal ao plano é diretor da reta. Então, uma equação vetorial da reta é:

$$(x, y, z) = (3, -2, 3) + k(3, -3, -2), k \in \mathbb{R}$$

3.3

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HC}}{\|\overrightarrow{HA}\|\|\overrightarrow{HC}\|}$$

Como

$$\overrightarrow{HA} = A - H(0, 2, -3) \text{ e } \overrightarrow{HC} = C - H(-3, -1, -3).$$

Tem-se:

$$\cos\alpha = \frac{0 - 2 + 9}{\sqrt{13} \times \sqrt{19}} = \frac{7}{\sqrt{247}}$$

Então,

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \frac{49}{247} = \frac{198}{247}$$

4

4.1 Como $T(0) = 80$, tem-se $80 = a + 20$, ou seja, $a = 60.$
Portanto, $a = 60$.

4.2

$T(t) = 50 \Leftrightarrow 60 \times 2^{-0{,}2t} + 20 = 50 \Leftrightarrow 2^{-0{,}2t} = \frac{30}{60} \Leftrightarrow -0{,}2t = \log_2\left(\frac{1}{2}\right)$

$\Leftrightarrow t = \frac{-1}{-0{,}2} \Leftrightarrow t = 5$. Terá de esperar 5 minutos.

4.3 Para $T > 20$

$$60 \times 2^{-0,2t} + 20 = T \Leftrightarrow 2^{-0,2t} = \frac{T-20}{60} \Leftrightarrow -0,2t = \log_2\left(\frac{T-20}{60}\right) \Leftrightarrow t = -\frac{1}{-0,2}\log_2\left(\frac{T-20}{60}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = \log\left(\frac{60}{T-20}\right)^{-1} \Leftrightarrow t = 5\log_2\left(\frac{60}{T-20}\right)$$

5

O valor $\frac{f(a)+f(b)}{2}$ pertence sempre ao intervalo de extremos $f(a)$ e $f(b)$.

Se $a, b \in \mathrm{I}$, então, $[a, b] \subset I$, pelo que f é contínua em $[a, b]$.

Como $f(a)$ e $f(b)$ são números reais, tem-se que $f(a) < f(b)$, ou $f(a) > f(b)$, ou ainda $f(a) = f(b)$.

No primeiro caso, tem-se:

$$f(a) = \frac{f(a)+f(a)}{2} < \frac{f(a)+f(b)}{2} < \frac{f(b)+f(b)}{2} = f(b)$$

No segundo caso,

$$f(b) = \frac{f(b)+f(b)}{2} < \frac{f(a)+f(b)}{2} < \frac{f(b)+f(a)}{2} = f(a)$$

Em qualquer destes casos, o teorema de Bolzano-Cauchy garante que existe $c \in [a, b]$, tal que:

$$f(c) = \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

ou seja,

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} \in f(I)$$

Se $f(a) = f(b)$

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} = \frac{f(a)+f(a)}{2} = f(a) \in f(I)$$

Prova-se, assim, o pretendido.

PROVA 3

Caderno 1

Página 11

1

1.1 Como as bolas com os números 1 , 2 e 3 têm de ficar juntas, formam um único grupo que pode permutar com as outras nove bolas, originando $10!$ sequências e, para cada uma destas, as três bolas com o 1 , 2 e 3 assumem $3!$ posições.

Assim, o número de sequências é igual a $10! \times 3! = 21\,772\,800$.

1.2 Obter pelo menos duas bolas com número par significa que se pode obter:

— duas bolas com número par e duas com número ímpar;

— três bolas com número par e uma com número ímpar;

— quatro bolas com número par.

Então, como a ordem não é relevante, a probabilidade pedida é

$$\frac{{}^6C_2 \times {}^6C_2 + {}^6C_3 \times {}^6C_1 + {}^6C_4}{{}^{12}C_4} = \frac{360}{495} = \frac{8}{11}$$

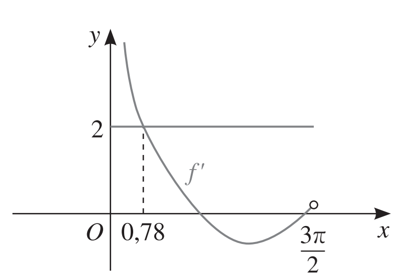
2

Equacionando o problema, pretende-se encontrar $x \in D_f$, tal que $f'(x) = 2$.

$f'(x) = \cos x + \frac{1}{x}$.

Utilizando a calculadora gráfica, obtém-se o gráfico seguinte.

A abcissa de P é, aproximadamente, $0,78$.



Caderno 2

Grupo I

Página 12

1

Opção (B).
Trata-se da linha 14, que tem no total 15 elementos. O maior elemento é o que ocupa a posição central, ou seja, o oitavo elemento $({}^{14}C_7)$.

2

Opção (B).
Por observação do gráfico, conclui-se que f' é decrescente e, então, $f''(x) \leqslant 0, \forall x \in \mathbb{R}^+$.

3

Opção (D).

$$\lim_{x \to 0^-}\left(3 + \frac{2}{\ln(-x)}\right) = 3 + \frac{2}{-\infty} = 3$$

$$\lim_{x \to 0^+}(\ln(x + k)) = \ln k$$

Para que g seja contínua, $\ln k = 3 \Leftrightarrow k = e^3$.

4

Opção (B).
A área do quarto de círculo é igual a $\frac{\pi \times 2^2}{4} = \pi$.

$$A_{[ODC]} = \frac{2\cos\alpha \times 2\sin\alpha}{2} = 2\sin\alpha\cos\alpha = \sin(2\alpha)$$

A área a sombreado é igual a $\pi - \sin(2\alpha)$.

5

Opção (B).
Coroa circular: $1 \leqslant |z| \leqslant 2$.
Região da coroa circular a sombreado: $-\frac{3\pi}{4} \leqslant Arg(z) \leqslant \frac{\pi}{4}$.

6

Opção (B).

$$\lim\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n = \lim\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right] = e \times e^{-1} = e^0 = 1$$

$$\lim(n^3\,\mathrm{e}^{-n}) = \lim\frac{n^3}{e^n} = \lim\left(\frac{e^n}{n^3}\right)^{-1} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

7

Opção (A).
Seja $C(x, 0, 0)$, então, $\overrightarrow{AB}(-3, -1, 0)$ e $\overrightarrow{BC}(x + 1, -2, 0)$
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 2 \Leftrightarrow -3(x + 1) + 2 = 2 \Leftrightarrow x = -1$.

8

Opção (B).
Um vetor normal ao plano α é $\vec{n}_\alpha(1, 1, -1)$ e um normal ao plano β é $\vec{n}_\beta(2, 2, 2)$.
Como os vetores $\vec{n}_\alpha$ e $\vec{n}_\beta$ são não colineares, os planos são secantes e, então, a sua interseção é uma reta.

Grupo II

Página 14

1

Seja n o número total de rebuçados, então, o número de rebuçados de laranja é $\frac{2}{3}n$.

A probabilidade referida é dada por $\frac{\frac{2}{3}n}{n} \times \frac{\frac{2}{3}n - 1}{n - 1} = \frac{2}{3} \times \frac{2n - 3}{3n - 3}$, dado que a extração é feita sem reposição.

$$\frac{2}{3} \times \frac{2n-3}{3n-3} = \frac{5}{12} \Leftrightarrow \frac{2n-3}{3n-3} = \frac{5}{12} \times \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{2n-3}{3n-3} = \frac{5}{8} \underset{n \neq 1}{\underbrace{\Leftrightarrow}} 16n - 24 = 15n - 15 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 16n - 15n = 24 - 15 \Leftrightarrow n = 9$

Existem, no total, 9 rebuçados no saco.

2

$$z^2 - 6z + 25 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{6 \pm \sqrt{-64}}{2} \Leftrightarrow z = \frac{6 \pm \sqrt{64i^2}}{2} \Leftrightarrow z = 3 \pm 4i$$

As soluções da equação são: $3 + 4i$ e $3 - 4i$.

$|3 + 4i| = |3 - 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, o que prova que pertencem à circunferência de centro na origem e raio 5.

3

3.1 $\lim\limits_{x \to +\infty} (xe^{2-x}) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(e^2 \frac{x}{e^x}\right) = e^2 \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{e^x}{x}\right)^{-1} = e^2 \times \frac{1}{+\infty} = e^2 \times 0 = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (xe^{2-x}) = -\infty \times (+\infty) = -\infty$

Então, a reta de equação $y = 0$ é a única assíntota horizontal ao gráfico de f.

3.2 $f'(x) = x' e^{2-x} + (2-x)' e^{2-x} x = e^{2-x}(1-x)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	máx	$\searrow$

Conclui-se que $f(1) = e$ é o único máximo relativo de f.

4

4.1 $$\lim_{x \to \frac{5\pi}{6}} \frac{h\left(\frac{5\pi}{6}\right) - h(x)}{6x - 5\pi} = \lim_{x \to \frac{5\pi}{6}} \left(- \frac{h(x) - h\left(\frac{5\pi}{6}\right)}{6\left(x - \frac{5\pi}{6}\right)} \right) = -\frac{1}{6} h'\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{1}{6}\left(\frac{5\pi}{6} + \cos\frac{5\pi}{3}\right) = -\frac{1}{6}\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{1}{2}\right)$$

$$= -\frac{5\pi + 3}{36}$$

4.2 $h''(x) = 1 - 2\sin(2x)$

$$1 - 2\sin(2x) = 0 \Leftrightarrow \sin(2x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee 2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + k\pi \vee x = \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$h''(x) = 0 \wedge x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} \vee x = \frac{5\pi}{12}$$

x	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{12}$		$\frac{5\pi}{12}$		$\frac{\pi}{2}$
$h''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
h		$\cup$	P.I.	$\cap$	P.I.	$\cup$	

O gráfico de h tem a concavidade voltada para cima em $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{12}\right]$ e em $\left[\frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{2}\right[$ e voltada para baixo em $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}\right]$.

O gráfico de h tem dois pontos de inflexão de abcissas $\frac{\pi}{12}$ e $\frac{5\pi}{12}$.

4.3 Pretende-se mostrar que a equação $h'(x) = 2$ é possível em $[0, \pi]$.

h' é contínua em $\mathbb{R}$, em particular, é contínua em $[0, \pi]$.

$h'(0) = \cos 0 = 1$

$h'(\pi) = \pi + \cos(2\pi) = \pi + 1$

$h'(0) < 2 < h'(\pi)$

Pelo teorema de Bolzano-Cauchy, a equação $h'(\pi) = 2$ é possível em $[0, \pi]$.

5

5.1 O ponto A é o ponto de interseção das retas AB e AE, então, basta verificar que pertence às duas retas

$$(1, 1, 2) = (1, 0, 1) + k(0, 1, 1) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 1 \\ 1 = k \\ 2 = 1 + k \end{cases} \Leftrightarrow k = 1$$

$$(1, 1, 2) = (0, 1, 1) + k(1, 0, 1) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = k \\ 1 = 1 \\ 2 = 1 + k \end{cases} \Leftrightarrow k = 1$$

Prova-se, assim, que o ponto de coordenadas $(1, 1, 2)$ pertence às duas retas e, por isso, é o ponto A.

5.2 Seja $\vec{n}(a, b, c)$ um vetor normal ao plano ABE, então:

$$\begin{cases} (a, b, c) \cdot (0,1,1) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (1,0,1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b + c = 0 \\ a + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -c \\ a = -c \end{cases}$$

Se $c = -1$, o vetor de coordenadas $(1, 1, -1)$ é normal ao plano ABE.

Assim, uma equação cartesiana é do tipo $x + y - z + d = 0$.

Como $A(1, 1, 2)$ pertence ao plano ABE, tem-se: $1 + 1 - 2 + d = 0 \Leftrightarrow d = 0$.

Assim, uma equação cartesiana do plano ABE é $x + y - z = 0$.

PROVA 4

Caderno 1

Página 16

1

Considerando os acontecimentos:

A: «O ator é residente»;

B: «O ator é mulher»;

pretende-se calcular $P(B|\overline{A})$.

Sabe-se que:

$P(A) = 0{,}8$ e que $P(B) = 0{,}6$, e $P(\overline{A}|\overline{B}) = 0{,}3$. Então, $P(\overline{A}) = 0{,}2$; $P(\overline{B}) = 0{,}4$ e

$\dfrac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = 0{,}3$, ou seja, $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}3 \times 0{,}4 = 0{,}12$

Assim, como

$$P(\overline{A}) = P(\overline{A} \cap \overline{B}) + P(B \cap \overline{A})$$

tem-se,

$$P(B \cap \overline{A}) = 0{,}2 - 0{,}12 = 0{,}08$$

E, portanto,

$$P(B|\overline{A}) = \frac{P(B \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{0{,}08}{0{,}2} = \frac{2}{5}$$

2

2.1 A função derivada de f tem domínio $[0, \pi]$ e é definida por:

$$f'(x) = e^x + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right) - 2x$$

Assim, porque é a soma de funções contínuas neste intervalo, f' é uma função contínua; $f'(0) = \frac{3}{2} < 6$ e $f'(\pi) = e^\pi - 2\pi \approx 16{,}8575 > 6$.

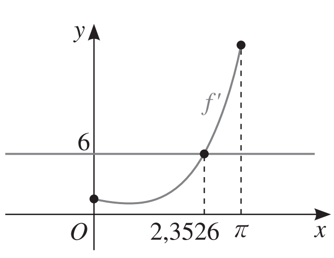
Então, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, existe pelo menos um $c \in [0, \pi]$, tal que $f'(c) = 6$.

Portanto, existe um ponto do gráfico de f em que a reta tangente ao mesmo tem declive 6, ou seja, é paralela à reta de equação $y = 6x$.

2.2 Pretendem-se encontrar as coordenadas de um ponto $B(x, f(x))$, tal que $f'(x) = 6$.

Na calculadora, obtém-se a abcissa do ponto de interseção da reta de equação $y = 6$ com o gráfico da função f', cujo valor aproximado às décimas de milésimas é $2{,}3526$.

Como $f(2{,}3526) = 5{,}9014$, tem-se que as coordenadas do ponto B são, com valores arredondados às centésimas, $(2{,}35; 5{,}90)$.



Caderno 2

Grupo I

Página 17

1

Opção (C).
Para dispor alternadamente os algarismos e as vogais, os algarismos têm de ocupar as posições extremas e a central, restando as outras duas posições para as duas vogais. Assim, como existem ${}^{10}A_3$ sequências diferentes que se podem formar com três algarismos distintos, escolhidos de entre os 10 algarismos e, por cada uma destas, existem 5^2 sequências distintas com repetições de duas vogais escolhidas de 5. Portanto, existem ${}^{10}A_3 \times 5^2$ códigos distintos nas condições pedidas.

2

Opção (A).
O termo geral do polinómio reduzido que resulta do desenvolvimento de $(x^3 - 1)^7$ é:

$$ {}^7C_k (x^3)^{7-k}(-1)^k = {}^7C_k x^{21-3k}(-1)^k $$

Como se pretende o termo de grau 6 e

$$ 21 - 3k = 6 \Leftrightarrow k = 5 $$

Tem-se que o termo de ordem 6 é

$$ {}^7C_5 x^6(-1)^5 = -21x^6 $$

3

Opção (B).
O gráfico de f tem dois pontos de inflexão, tendo concavidade voltada para baixo entre esses dois pontos. Sendo f duas vezes diferenciável, f'' tem de ter dois zeros e ser negativa no intervalo aberto cujos extremos são esses zeros. Apenas a função representada em (B) reúne esses requisitos.

4

Opção (B).
O gráfico de g é a imagem do gráfico de f pela translação de vetor de coordenadas $(3, 2)$. Então, se o ponto de coordenadas $(-1, 0)$ pertence ao gráfico de f, o ponto de coordenadas $(-1 + 3, 0 + 2)$ pertence, necessariamente, ao gráfico de g.

5

Opção (D).

$$ \lim u_n = \left(\lim\left(\frac{n+2}{n-2}\right)^n\right)^2 = \left(\frac{\lim\left(1+\frac{2}{n}\right)^n}{\lim\left(1-\frac{2}{n}\right)^n}\right)^2 = \left(\frac{e^2}{e^{-2}}\right)^2 = e^8 $$

Então, como $e^8 \in D_f$ e f é contínua:

$$ \lim f(u_n) = f(e^8) = \frac{1}{2}\ln(e^8) = \frac{8}{2} = 4 $$

6

Opção (B).
Considere-se um referencial o.n. xOy direto de origem O semieixo positivo Ox coincidente com a semirreta $\dot{O}A$ e unidade de medida de comprimento igual a metade do raio.
Neste referencial, os vetores $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ têm coordenadas $(2, 0)$ e $(2\cos x, 2\sin x)$, respetivamente.
Portanto,

$$ \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} = 2 \times 2\cos x + 0 \times \sin x = 4\cos x $$

7

Opção (C).
Dois números complexos são raízes índice quatro de um mesmo número complexo se têm a mesma norma e existe $k \in \mathbb{Z}$, tal que a diferença entre os seus argumentos é igual a $k\frac{\pi}{2}$.

(A) $\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$ (B) $\frac{5\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$ (C) $\frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 2\frac{\pi}{2}$ (D) $\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$

Como em todas as opções os números complexos apresentados são unitários, a opção correta só pode ser a (C).

8

Opção (D).

Seja r a distância de cada vértice à origem:

$$\frac{z_2}{i} = re^{i\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right)} = re^{i\frac{\pi}{2}} = z_1$$

Grupo II

Página 19

1

$i^{37} = i^{4 \times 9 + 1} = i$. Então,

$$\frac{(2-i)^2 - 1 + 6i^{37}}{1-i} = \frac{4 - 4i - 1 - 1 + 6i}{1-i} = \frac{(2+2i)(1+i)}{2} = 2i$$

2

Se A e B são acontecimentos independentes, $P(A \cap B) = P(A)P(B)^{(1)}$

$$P(A \cup B) - P(A) \times P(\overline{B}) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) - P(A)(1 - P(B)) \overset{(1)}{=}$$
$$= P(A) + P(B) - P(A)P(B) - P(A) + P(A)P(B) = P(B)$$

3

3.1 A função f é contínua em $]-\infty, 2[$ por ser o quociente de duas funções contínuas (restrições de uma exponencial e uma polinomial) e é também contínua em $[2, +\infty[$ por ser o produto de duas funções contínuas (restrições de uma polinomial e uma logarítmica).

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \frac{e^x - e^2}{4 - 2x} = \frac{e^2}{-2} \lim_{x \to 2^-} \frac{e^{x-2} - 1}{x - 2}$$

Fazendo $y = x - 2$, vem

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\frac{e^2}{2} \lim_{y \to 0^-} \frac{e^y - 1}{y} = \frac{-e^2}{2} \times 1 = -\frac{e^2}{2}$$

Conclui-se, assim, que não existem assíntotas verticais ao gráfico de f .

Assíntotas não verticais.

Como

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x - e^2}{4 - 2x} = -\frac{e^2}{+\infty} = 0$$

a reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de f em $-\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(x-2)\ln x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left[\left(1 - \frac{2}{x}\right)\ln x\right] = 1 \times (+\infty) = +\infty$$

Assim, conclui-se que não existe assíntota não vertical ao gráfico de f em $+\infty$.

3.2 Para $x \in [2, +\infty[$:

$f'(x) = \ln x + \dfrac{x-2}{x}$

$f''(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2} = \dfrac{x+2}{x^2}$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$

x	2	$+\infty$
$x + 2$	$+$	$+$
x^2	$+$	$+$
$f''(x)$	n. d.	$+$
f	n. d.	$\cup$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $[2, +\infty[$.

Não existe nenhum ponto de inflexão.

4

4.1 Como o ponto D tem coordenadas $(2, 2, 2)$, o raio da superfície esférica é 2 .

Então, a equação pedida é:

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 4$$

4.2 A projeção ortogonal do ponto D sobre o plano ABC é a interseção da reta que contém o ponto D e é perpendicular a ABC.
Essa reta pode ser definida pelo seguinte sistema de equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = 2 + k \\ y = 2 + k, k \in \mathbb{R} \\ z = 2 + k \end{cases}$$

Então, a reta interseta o plano no ponto de coordenadas $(2 + k, 2 + k, 2 + k)$ com $k \in \mathbb{R}$, tal que $(2 + k) + (2 + k) + (2 + k) = 2$, ou seja, $k = -\frac{4}{3}$.
Portanto, a projeção ortogonal do ponto D sobre ABC é o ponto de coordenadas

$$\left(2 - \frac{4}{3}, 2 - \frac{4}{3}, 2 - \frac{4}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

c.q.d.

4.3 A interseção dos dois planos é a reta BC.
Como os pontos B e C pertencem aos eixos Oy e Oz, respetivamente, têm coordenadas (0, 2, 0) e (0, 0, 2), respetivamente.
Assim, porque $\overrightarrow{BC} = C - B$ tem coordenadas $(0, -2, 2)$, esta pode ser definida pela equação

$$(x, y, z) = (0, 2, 0) + k(0, -2, 2), k \in \mathbb{R}$$

5.1

$$f(x) = \frac{\sqrt{6}}{2} \Leftrightarrow \sin(\pi x) - \cos(\pi x) = \frac{\sqrt{6}}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\pi x) - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(\pi x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\pi x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \pi x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee \pi x - \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \pi x = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi \vee \pi x = \frac{11\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{7}{12} + 2k \vee x = \frac{11}{12} + 2k, k \in \mathbb{Z}$$

5.2 $f'(x) = \pi\cos(\pi x) + \pi\sin(\pi x)$
$f''(x) = -\pi^2\sin(\pi x) + \pi^2\cos(\pi x) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow f''(x) = -\pi^2\left(\sin(\pi x) - \cos(\pi x)\right) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow f''(x) = -\pi^2 f(x)$, logo, $\alpha = \pi^2$

PROVA 5

Caderno 1

Página 20

1

1.1 O número de maneiras de dispor as quatro cartas de espadas, duas no princípio e duas no fim, é dado por $4!$, sendo que existem 5 possibilidades de colocar o grupo de cartas do naipe de copas na sequência de forma que fiquem juntas. Como quer as cartas do naipe de copas quer as cartas do naipe de ouros podem trocar entre cada tipo de naipe, tem-se que existem $4! \times 4!$ maneiras de efetuar tais trocas; sendo assim, o número de sequências diferentes que se podem obter é dado por:

$$4! \times 4! \times 4! \times 5 = 69\,120$$

1.2 Existem, neste caso, 12 cartas no total. Para que existam, pelo menos, duas cartas do naipe de espadas entre as três cartas, escolhidas ao acaso, tem-se ou duas ou três cartas do naipe de espadas e, assim sendo, a probabilidade pedida é:

$$\frac{{}^4C_2 \times {}^8C_1 + {}^4C_3}{{}^{12}C_3} = \frac{13}{55} \approx 24\ \%$$

2

2.1 Sabe-se que, ao fim de 15 dias, o número de abelhas operárias é dado por $2N_0$, logo, tem-se:

$$N(15) = 2N_0$$

Resolvendo a equação:

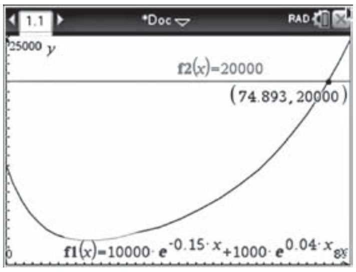
$$N(15) = 2N_0 \Leftrightarrow N_0\,e^{15k} = 2N_0 \Leftrightarrow e^{15k} = 2 \Leftrightarrow 15k = \ln 2 \Leftrightarrow k = \frac{\ln 2}{15} \approx 0{,}046$$

2.2 O número total de abelhas, operárias e zângões, A, evolui em função do tempo t, em dias, de acordo com a função dada por:

$$A(t) = 10\,000e^{-0{,}15t} + 1000e^{0{,}04t}$$

Pretende-se saber qual é o valor de t para o qual $A(t) = 20\,000$.

Introduzindo na calculadora gráfica a função considerada e o valor 20 000 , obtém-se:



$(t \approx 74{,}893)$

Como $0{,}893 \times 24 = 21$, tem-se que o momento pretendido foi no dia 74 , aproximadamente às 21 horas.

Caderno 2

Grupo I

Página 21

1

Opção (A).
O segundo e o penúltimo elementos de uma determinada linha do triângulo de Pascal são iguais; assim sendo, conclui-se que esse valor neste caso é 15 e, portanto, a linha é constituída por 16 elementos. Destes, existem 10 com valor superior a 200 $({}^{15}C_0 = {}^{15}C_{15} = 1$; ${}^{15}C_1 = {}^{15}C_{14} = 15$; ${}^{15}C_2 = {}^{15}C_{13} = 105$ e ${}^{15}C_p > 200$, $p \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\})$.
Logo, a probabilidade pedida é: $\dfrac{10}{16} = \dfrac{5}{8}$.

2

Opção (B).
Tem-se que:

$$\lim \frac{2n - 1}{n} = \lim \frac{2n}{n} = 2$$

e

$$\lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{kn} = \left(\lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{k} = e^{k}$$

Logo, $e^k = 2 \Leftrightarrow k = \ln 2$.

3

Opção (B).
O domínio da expressão é dado por: $D = \{x \in \mathbb{R}: x + 5 > 0\} =]-5, +\infty[$.
Tem-se, para $x \in D$:

$$\log(x + 5) \leq 1 \Leftrightarrow \log(x + 5) \leq \log 10 \Leftrightarrow x + 5 \leq 10 \Leftrightarrow x \leq 5$$

O conjunto-solução da condição é, assim, dado por:

$$]-\infty, 5] \cap]-5, +\infty[=]-5, 5]$$

4

Opção (D).
Sabe-se que a derivada no ponto de tangência é -1 , pois o declive da reta tangente é -1 .
Na opção (A), $(\sin x)' = \cos x$, logo, $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
Como $\sin(\pi + 2k\pi) = 0, k \in \mathbb{Z}$, verifica-se que nenhum dos pontos para os quais o declive da reta tangente é -1 verifica $y + x + 1 = 0$.
Na opção (B), $(\cos x)' = -\sin x$, logo, $-\sin x = -1 \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
Como $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 0, k \in \mathbb{Z}$, verifica-se que nenhum dos pontos para os quais o declive da reta tangente é -1 verifica $y + x + 1 = 0$.
Na opção (C), $(-\ln x)' = -\dfrac{1}{x}$, logo, $-\dfrac{1}{x} = -1 \Leftrightarrow x = 1$.
Uma vez que $f(1) = 0$, o ponto de coordenadas $(1, 0)$ teria de verificar a equação $y + x + 1 = 0$ e tal não acontece.
Na opção (D), $(-e^x)' = -e^x$ e $-e^x = -1 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.
Como $f(0) = -1$, o ponto de coordenadas $(0, -1)$ verifica a equação $y + x + 1 = 0$, a reta com esta equação é tangente ao gráfico da função definida por $f(x) = -e^x$.

5

Opção (D).

$e^{\frac{1}{\cos(2x)-1}} = e^{\frac{1}{(1-2\sin^2 x)-1}} = e^{\frac{-1}{2\sin^2 x}}$

Como $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to \pi^-} f(x) = e^{\frac{1}{0^-}} = e^{-\infty} = 0$, tem-se que as retas de equação $x = 0$ e $x = \pi$ não são assíntotas verticais ao gráfico de f.

Uma vez que o domínio é limitado, não existem assíntotas horizontais.

Para $x \in]0, \pi[$, tem-se $0 < 2\sin^2 x \leq 2$, logo, $e^{-0{,}5} \leq e^{\frac{-1}{2\sin^2 x}} < 0$ e, sendo assim, f tem mínimo absoluto.

A aplicação do teorema de Bolzano-Cauchy permite concluir que a opção correta é a (D), uma vez que f é contínua em $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$, e, sendo $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{e^2}$ e $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{e}$, tem-se que $e < 3 < e^2$, logo, $f\left(\frac{\pi}{6}\right) < \frac{1}{3} < f\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

6

Opção (C).

$$\int_{-1}^{2} \frac{x}{(x^2+1)^2}dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{2} 2x(x^2+1)^{-2}dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{x^2+1}\right]_{-1}^{2} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{20}$$

7

Opção (B).

Um vetor perpendicular ao plano tem de coordenadas $(-1, -1, 1)$, logo, uma reta perpendicular ao plano considerado terá de ter um vetor diretor colinear com este vetor.

Das opções apresentadas, só a (A) e a (B) é que verificam este pressuposto e destas só a equação da reta da opção (B) é que passa na origem ($k = 1$).

8

Opção (D).

$$\frac{(1+2i)(3-i)+10i^{15}}{2-i} = \frac{3-i+6i+2-10i}{2-i} = \frac{(5-5i)(2+i)}{5} = 3-i$$

Grupo II

Página 22

1

$|z_1| = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = 2$

Sendo θ um argumento de z_1, tem-se que $\tan\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$. Por outro lado, θ pertence ao segundo quadrante, logo, $\theta = \pi - \frac{\pi}{6}$, isto é, $\theta = \frac{5\pi}{6}$, logo, $z_1 = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

$$(z_1 \times z_2)^n = \left(2e^{i\frac{5\pi}{6}} \times \frac{1}{2}e^{-i\frac{4\pi}{5}}\right)^n = \left(e^{i\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{4\pi}{5}\right)}\right)^n = e^{i\frac{\pi n}{30}}$$

Assim sendo, para $k \in \mathbb{Z}$, tem-se:

$$\frac{\pi n}{30} = \pi + 2k\pi \Leftrightarrow n = 30 + 60k$$

Substituindo k por 0, obtém-se $n = 30$.

2

$$\begin{aligned} &P(A \cup \overline{B}) + P(\overline{A}) \times P(B) = \\ &= P(A) + P(\overline{B}) - P(A \cap \overline{B}) + (1 - P(A)) \times P(B) = \\ &= P(A) + 1 - P(B) - (P(A) - P(A \cap B)) + P(B) - P(A) \times P(B) = \\ &= P(A) + 1 - P(A) + P(A \cap B) - P(A) \times P(B) = \\ &= 1 + P(A) \times P(B) - P(A) \times P(B) = 1 \end{aligned}$$

c.q.d.

3

3.1 Um vetor normal ao plano α tem de coordenadas $(4, 2, 1)$. Dois vetores que sejam perpendiculares a este vetor e que não sejam colineares entre si são igualmente paralelos ao plano α. Assim sendo, os vetores de coordenadas $(-1, 0, 4)$ e $(0, 1, -2)$, por exemplo, são vetores paralelos ao plano α e, simultaneamente, paralelos ao plano pretendido.

O ponto D tem de coordenadas $(0, 0, 4)$.

Um sistema de equações paramétricas que defina o plano pretendido é:

$$\begin{cases} x = -s \\ y = t \\ z = 4 + 4s - 2t \end{cases}, s, t \in \mathbb{R}$$

3.2 O ponto B tem de coordenadas $(4, 4, 0)$.

O ponto K tem coordenadas do tipo $(4, k, 4)$, o que, substituindo cada coordenada na equação do plano α, se obtém:

$$16 + 2k + 4 = 24 \Leftrightarrow k = 2$$

Conclui-se que $K(4, 2, 4)$.

Relativamente ao ponto L, tem coordenadas do tipo $L(l, 4, 4)$, e, sendo assim, obtém-se a equação:

$$4l + 8 + 4 = 24 \Leftrightarrow l = 3$$

por substituição das coordenadas na equação do plano α, isto é, $L(3, 4, 4)$,

Tem-se: $\overrightarrow{LB}(1, 0, -4)$ e $\overrightarrow{LK}(1, -2, 0)$ e, sendo assim:

$$\cos\beta = \frac{\overrightarrow{LB} \cdot \overrightarrow{LK}}{\|\overrightarrow{LB}\| \times \|\overrightarrow{LK}\|} \Leftrightarrow \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{17} \times \sqrt{5}} \Leftrightarrow \cos\beta = \frac{\sqrt{85}}{85}$$

Como $\sin(2\beta) = 2\sin\beta\cos\beta$, basta calcular $\sin\beta$, por aplicação da fórmula fundamental da trigonometria, e, sabendo que β é agudo $(\overrightarrow{LB} \cdot \overrightarrow{LK} = 1 > 0)$, logo:

$$\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1 \Leftrightarrow \sin^2\beta + \left(\frac{\sqrt{85}}{85}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \sin^2\beta = 1 - \frac{1}{85} \underset{\beta \text{ agudo}}{\Rightarrow} \sin\beta = \frac{2\sqrt{1785}}{85}$$

Como tal:

$$\sin(2\beta) = 2 \times \frac{2\sqrt{1785}}{85} \times \frac{\sqrt{85}}{85} \Leftrightarrow \sin(2\beta) = \frac{4\sqrt{21}}{85}$$

4

4.1 Sendo f duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, pode afirmar-se que f' é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, em particular em $x = 0$, isto é, $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = f'(0)$:

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = k + 1 = f'(0) \text{ e } \lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{\ln x} = \frac{0}{-\infty} = 0 \text{ e, como tal, } k + 1 = 0 \Leftrightarrow k = -1.$$

4.2 O teorema de Bolzano-Cauchy permite afirmar o que se pretende, pois f' é contínua em $[e, e^2]$, uma vez que é o quociente de duas funções contínuas (a função identidade e a função logaritmo) e, sendo $f(e) = e$ e $f(e^2) = \frac{e^2}{2}$, tem-se que $f(e) < 3 < f(e^2)$.

4.3 Para $x \in \mathbb{R}^-, f''(x) = e^x + xe^x \Leftrightarrow f''(x) = (x + 1)e^x$

Calculando os zeros de f'': $f''(x) = 0 \Leftrightarrow (x + 1)e^x = 0 \Leftrightarrow x = -1$

x	$-\infty$	-1	0
$f''(x)$	$-$	0	$+$
f	$\cap$	P.I.	$\cup$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, -1]$ e voltada para cima em $[-1, 0[$.

Existe um ponto de inflexão cuja abcissa é -1.

5

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{2\cos^2 x} \Leftrightarrow g'(x) = \frac{2\cos^2 x - 1}{2\cos^2 x}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Sabendo que $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$:

$k = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{4}$

$k = -1 \rightarrow x = -\frac{\pi}{4}$

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
g	↘	Mín.	↗	Máx.	↘

g é decrescente em $\left]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right]$ e em $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right[$; e é crescente em $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.

$g\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$ é mínimo relativo e $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$ é máximo relativo.

PROVA 6

Caderno 1

Página 24

1

1.1 Dos nove vértices do poliedro, cinco pertencem à pirâmide e oito ao cubo, sendo que quatro vértices pertencem simultaneamente aos dois sólidos.
Ao pretender-se que, pelo menos três dos quatro vértices escolhidos pertençam somente ao cubo, significa que ou três dos quatro vértices escolhidos pertencem exclusivamente ao cubo ou quatro, e, sendo assim, a probabilidade pedida é igual a:

$$\frac{{}^4C_3 \times {}^5C_1 + {}^4C_4}{{}^9C_4} = \frac{21}{126} = \frac{1}{6} \approx 17\ \%$$

1.2 As coordenadas dos pontos E e H são, respetivamente, $(2, 0, 2)$ e $(1, 1, 4)$.
Tem-se que $\overrightarrow{OE}(2, 0, 2)$ e $\overrightarrow{OH}(1, 1, 4)$.
Seja α a amplitude, em graus, do ângulo EOH, logo:

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{OH}}{\|\overrightarrow{OE}\| \times \|\overrightarrow{OH}\|} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{2+8}{\sqrt{8} \times \sqrt{18}} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{5}{6}$$

Recorrendo à calculadora, verifica-se que $\alpha \approx 34°$.

2

Tem-se que:

$T(30) = 70 \Leftrightarrow 25 + 50e^{-30k} = 70 \Leftrightarrow 50e^{-30k} = 45 \Leftrightarrow e^{-30k} = 0{,}9 \Leftrightarrow -30k = \ln 0{,}9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k = \frac{\ln 0{,}9}{-30} \Leftrightarrow k \approx 0{,}005$

Como um minuto e meio corresponde a 90 segundos, obtém-se:

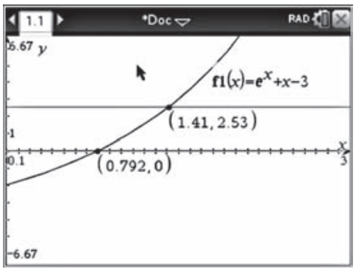
$$T(90) = 25 + 50e^{-0{,}005 \times 90} \approx 61{,}5\ °\mathrm{C}$$

3

Representando graficamente a função f, e calculando o seu zero conclui-se que a abcissa do ponto A é $0{,}792$ e, assim sendo, como a área do triângulo $[OAB]$ é uma unidade de área, tem-se que:

$$\frac{0{,}792 \times f(x)}{2} = 1 \Leftrightarrow f(x) = \frac{2}{0{,}792}$$

A abcissa de B é a abcissa do ponto de interseção do gráfico de f com a reta de equação $y = \frac{2}{0{,}792}$.



Assim sendo, a abcissa do ponto B é, aproximadamente, $1{,}4$.

Caderno 2

Grupo I

Página 25

1

Opção (C).
O número de maneiras de distribuir os três «a», os dois «3» e os dois caracteres «#» e «%» é dado por:

$$^7C_2 \times {}^5C_3 \times 2! = 420$$

2

Opção (B).
Tem-se que: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
Como $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) \Leftrightarrow 0{,}2 = 0{,}3 - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0{,}1$

por outro lado, $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} \Leftrightarrow P(B) = \dfrac{0{,}1}{0{,}4} \Leftrightarrow P(B) = 0{,}25$

Logo: $P(A \cup B) = 0{,}3 + 0{,}25 - 0{,}1 = 0{,}45$

3

Opção (D).
Um vetor normal ao plano α tem coordenadas $(1, -1, 2)$ e um vetor normal a β, $(m, 0, -1)$.
Para que os planos sejam perpendiculares, os vetores normais têm de ser perpendiculares, isto é:

$$(1, -1, 2) \cdot (m, 0, -1) = 0 \Leftrightarrow m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 2$$

4

Opção (B).

$\lim u_n = \lim\left(1 - \dfrac{2}{n}\right)^n = e^{-2}$

Como f é contínua,
$\lim f(u_n) = f(\lim u_n) = f(e^{-2}) = 1 + \ln(e^{-2}) = 1 - 2 = -1$

5

Opção (B).

$3^{\frac{2}{x}} - 9 \leqslant 0 \Leftrightarrow 3^{\frac{2}{x}} \leqslant 9 \Leftrightarrow 3^{\frac{2}{x}} \leqslant 3^2 \Leftrightarrow \dfrac{2}{x} \leqslant 2 \Leftrightarrow \dfrac{2-2x}{x} \leqslant 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2 - 2x \leqslant 0 \wedge x > 0) \vee (2 - 2x \geqslant 0 \wedge x < 0) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x \geqslant 1 \wedge x > 0) \vee (x \leqslant 1 \wedge x < 0) \Leftrightarrow x \in]-\infty, 0[\cup [1, +\infty[$

6

Opção (A)

$g''(x) = 1 - \dfrac{2}{x} \Leftrightarrow g''(x) = \dfrac{x-2}{x}$

$g''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

x	0	2	$+\infty$
$x - 2$	$-$	0	$+$
x	$+$	$+$	$+$
$g''(x)$	$-$	0	$+$
g	$\cap$	P.I.	$\cup$

O gráfico de g tem a concavidade voltada para cima em $[2, +\infty[$.

7

Opção (C).

$f'(x) = \dfrac{(1 + \cos(2x))'}{1 + \cos(2x)} \Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{-2\sin(2x)}{1 + \cos^2 x - \sin^2 x} \Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{-4\sin x \cos x}{2\cos^2 x} \Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{-2\sin x}{\cos x} \Leftrightarrow$

$f'(x) = -2\tan x$

8

Opção (D).

$$z = \frac{1+ki}{2-i} - i^5 \Leftrightarrow z = \frac{(1+ki)(2+i)}{(2-i)(2+i)} - i \Leftrightarrow z = \frac{2+i+2ki-k}{5} - i \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{2-k}{5} + \frac{2k-4}{5}i$$

Para que z seja imaginário puro $2-k=0 \wedge 2k-4 \neq 0 \Leftrightarrow k=2 \wedge k \neq 2$

Conclui-se, assim, que não existe k nas condições solicitadas.

Grupo II

Página 26

1

$|z_1| = |-1+i| = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}$

Seja θ um argumento de z_1, tem-se que $\tan\theta = \frac{1}{-1} = -1$. Por outro lado, θ pertence ao segundo quadrante, logo, $\theta = \pi - \frac{\pi}{4}$, isto é, $\theta = \frac{3\pi}{4}$, logo, $z_1 = \sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

$$z = \frac{|z_1| \times \overline{z_2}}{(z_1)^3} \Leftrightarrow z = \frac{\sqrt{2} \times 2e^{-i\frac{\pi}{12}}}{\left(\sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)} \Leftrightarrow z = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{12}-i\frac{9\pi}{4}} \Leftrightarrow z = e^{-i\frac{28\pi}{12}} \Leftrightarrow z = e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

As raízes cúbicas do complexo z são dadas por: $e^{i\frac{-\frac{\pi}{3}+2k\pi}{3}}$, $k \in \{0, 1, 2\}$; assim sendo, na forma trigonométrica, as raízes cúbicas de z são:

$e^{-i\frac{\pi}{9}}$, $e^{i\frac{5\pi}{9}}$ e $e^{i\frac{11\pi}{9}}$.

2

$P(B|A)$ significa a probabilidade de sair bola 2 na segunda extração sabendo que saiu bola 2 na primeira extração. Assim sendo, o número de casos possíveis é dado por 11, pois, após a primeira extração e tendo saído a bola com o número 2, ficam no saco três bolas numeradas com o número 1, sete bolas numeradas com o número 2 $(2+5)$ e uma com o número 3. O número de casos favoráveis é 7 e, como tal, a probabilidade pedida é $\frac{7}{11}$.

3

Tem-se que $\overrightarrow{AB}(-2, -1, 1)$ e $\overrightarrow{AC}(0, -3, 1)$.

Calcule-se um vetor $\vec{n}(a, b, c)$, não nulo, perpendicular aos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$:

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (-2, -1, 1) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (0, -3, 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a - b + c = 0 \\ -3b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a - b + 3b = 0 \\ c = 3b \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 2b \\ c = 3b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ c = 3b \end{cases}$$

Tem-se, assim, que um vetor nas condições impostas é do tipo $\vec{n}(b, b, 3b)$, $b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Atribuindo, por exemplo, 1 a b, obtém-se $\vec{n}(1, 1, 3)$.

O plano ABC pode assim ser definido por $x + y + 3z + d = 0$, o que, substituindo x, y e z, respetivamente, pelas coordenadas do ponto $A(1, 1, 0)$, por exemplo, tem-se:

$1 + 1 + 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = -2$

Uma equação do plano ABC é $x + y + 3z - 2 = 0$.

Para obter as coordenadas resultantes da interseção do plano com os eixos coordenados, basta substituir na equação as coordenadas diferentes da letra do eixo respetivo, por 0. Assim:

Ox: $x + 0 + 0 = 2 \Leftrightarrow x = 2$, logo, o ponto de interseção do plano ABC com Ox tem coordenadas $X(2, 0, 0)$.

Oy: $0 + y + 0 = 2 \Leftrightarrow y = 2$, logo o ponto de interseção do plano ABC com Oy tem coordenadas $Y(0, 2, 0)$.

Oz: $0 + 0 + 3z = 2 \Leftrightarrow z = \frac{2}{3}$, logo, o ponto de interseção do plano ABC com Oz tem coordenadas $Z\left(0, 0, \frac{2}{3}\right)$.

O volume da pirâmide $[OXYZ]$ é dado por: $\dfrac{\frac{2 \times 2}{2} \times \frac{2}{3}}{3} = \frac{4}{9}$ u.v.

4

4.1 f é contínua em $[-\pi, 0[$, pois é formada pela soma de duas funções contínuas. É igualmente contínua em $\mathbb{R}^+$, pois é constituída pelo quociente de duas funções contínuas.
Verifique-se se f é contínua em $x = 0$:

$f(0) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0 + 2 + \sin 0 = 2$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{e^{2x} - 1}{x} = \lim\limits_{2x \to 0^+} \dfrac{e^{2x} - 1}{2x} \times 2 = 1 \times 2 = 2$

Conclui-se, assim, que f é contínua em $x = 0$ e, como tal, f é contínua (em $[-\pi, +\infty[$).

4.2 Para $\mathbb{R}^+$, $f'(x) = \dfrac{2e^{2x}x - (e^{2x} - 1)}{x^2}$, logo, o declive da reta tangente ao gráfico de f em $x = 1$ é $f'(1) = \dfrac{2e^2 - e^2 + 1}{1} = e^2 + 1$.

Assim sendo, a equação reduzida da reta tangente pretendida é do tipo:

$$y = (e^2 + 1)x + b$$

Substituindo as coordenadas do ponto $(1, f(1)) = (1, e^2 - 1)$, obtém-se:

$$e^2 - 1 = e^2 + 1 + b \Leftrightarrow b = -2$$

Logo, a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f em $x = 1$ é:

$$y = (e^2 + 1)x - 2$$

Para determinar a abcissa pretendida, basta substituir a ordenada por 0 na equação obtida:

$0 = (e^2 + 1)x - 2 \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{e^2 + 1}$

4.3 Para $x \in [-\pi, 0[$, tem-se que:

$f'(x) = 1 + 2\cos(2x)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(2x) = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee 2x = -\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi \vee x = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Sabendo que $x \in [-\pi, 0[$:

$k = 0 \to x = \dfrac{\pi}{3} \vee x = -\dfrac{\pi}{3}$

$k = -1 \to x = -\dfrac{2\pi}{3} \vee x = -\dfrac{4\pi}{3}$

x	$-\pi$		$-\dfrac{2\pi}{3}$		$-\dfrac{\pi}{3}$	0
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
f	Mín.	↗	Máx.	↘	Mín.	↗

f é crescente em $\left[-\pi, -\dfrac{2\pi}{3}\right]$ e em $\left[-\dfrac{\pi}{3}, 0\right[$; e é decrescente em $\left[-\dfrac{2\pi}{3}, -\dfrac{\pi}{3}\right]$.

$f\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right) = -\dfrac{2\pi}{3} + 2 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ é máximo relativo; $f(-\pi) = 2 - \pi$ e $f\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{\pi}{3} + 2 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ são mínimos relativos.

5

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x) - kx + \ln x}{x} = \underbrace{\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)}{x}}_{=1} - k + \underbrace{\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x}}_{=0\text{, limite notável}} \Leftrightarrow \underbrace{\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)}{x}}_{=1} - k + \underbrace{\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x}}_{=0\text{, limite notável}} = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 - k + 0 = 2 \Leftrightarrow k = -1$

Pelo enunciado, sabe-se que, se existir assíntota não vertical ao gráfico de h , o declive de tal reta é 2 .
Calcule-se, se existir, a ordenada na origem (b) de tal reta:

$\lim\limits_{x \to +\infty} (h(x) - 2x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (g(x) + x + \ln x - 2x) =$

$= \underbrace{\lim\limits_{x \to +\infty} (g(x) - x)}_{=1} + \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = 1 + (+\infty) = +\infty$

Conclui-se, assim, que a função h não admite assíntotas não verticais ao seu gráfico.

Bibliografia

BIVAR, António *et al.* — *Programa e Metas Curriculares, Matemática A*. Ministério da Educação e Ciência, 2014.

BIVAR, António *et al.* — *Caderno de Apoio às Metas Curriculares, Matemática A 12.º ano*. Ministério da Educação e Ciência, 2014.

BIVAR, António *et al.* — *Programa e Metas Curriculares, Matemática Ensino Básico.* Ministério da Educação e Ciência, 2011.

BIVAR, António *et al.* — *Caderno de Apoio às Metas Curriculares, Matemática 3.º Ciclo*. Ministério da Educação e Ciência, 2011.

LOURA, Luísa Canto; MARTINS, Maria Eugénia – *Introdução à Probabilidade*, Projeto REANIMAT. Lisboa: Departamento de Estatística e Investigação Operacional da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa e Fundação Calouste Gulbenkian, 2003.

LOURA, Luísa Canto; MARTINS, Maria Eugénia – *Cálculo combinatório, Complemento ao texto de Introdução à Probabilidade,* Projeto REANIMAT. Lisboa: Departamento de Estatística e Investigação Operacional da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa e Fundação Calouste Gulbenkian, 2003.

LOUREIRO, Cristina *et al.* – *Trigonometria e Números Complexos: Matemática – 12.º ano de escolaridade*. Lisboa: Departamento do Ensino Secundário do Ministério da Educação, 2000.

MACHADO, Armando – Números Complexos – 12.º ano. Projeto REANIMAT. Lisboa: Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa e Fundação Calouste Gulbenkian, 2004.

MARTINS, Helder – *Caderno de Atividades do Projeto Desafios Matemática A*, 12.º ano. Lisboa: Santillana, 2012.

MARTINS, Helder – *Fichas da Educateca do Projeto Desafios Matemática A*, 12.º ano. Lisboa: Santillana, 2012.

MARTINS, Maria Eugénia – *Probabilidades e Combinatória: Matemática – 12.º ano de escolaridade.* Lisboa: Departamento do Ensino Secundário do Ministério da Educação, 1999.

NCTM — *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. APM, 2007.

NEGRA, Cristina *et al.* — *Dimensões Matemática A*, 10.º ano. Lisboa: Santillana, 2015.

NEGRA, Cristina *et al.* — *Dimensões Matemática A*, 11.º ano. Lisboa: Santillana, 2016.

NEGRA, Cristina; MARTINHO, Emanuel — *Desafios Matemática A*, 12.º ano. Lisboa: Santillana, 2012.

PESTANA, Dinis Duarte; VELOSA, Sílvio Filipe – *Introdução à Probabilidade e à Estatística,* Volume I. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2002.

PROJETO T^3 — *Modelação no Ensino da Matemática, Calculadora, CBL e CBR*. Lisboa: APM, 1999.

SANCHEZ, Luís — *Introdução ao Estudo das Funções Reais de Variável Real, 12.º ano*. Projeto REANIMAT. Lisboa: Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa e Fundação Calouste Gulbenkian, 2003.

SILVA, J. Sebastião — *Compêndio de Matemática*. Lisboa: Edição GEP, 1975.

STRUIK, Dirk — *História Concisa das Matemáticas*. Lisboa: Gradiva, 1989.

TEIXEIRA, Paula *et al.* — *Funções: matemática — 12.º ano de escolaridade*. Departamento do Ensino Secundário do Ministério da Educação, 1999.

Internet
IAVE – http://www.iave.pt

O Projeto **Dimensões** de Matemática A destinado ao 12.º ano de escolaridade, do Ensino Secundário, é uma obra coletiva, concebida e criada pelo Departamento de Investigações e Edições Educativas da Santillana, sob a direção de Sílvia Vasconcelos.

EQUIPA TÉCNICA
Chefe de Equipa Técnica: Patrícia Boleto
Modelo Gráfico e Capa: Carla Julião
Ilustrações: Paulo Oliveira
Paginação: João Valado
Documentalistas: José Martins
Revisão: Catarina Pereira

EDITORA
Paula Inácio

CONSULTORES CIENTÍFICOS
Pedro J. Freitas — Professor Auxiliar do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. Doutorado em Matemática pela Universidade de Illinois. Além do trabalho de regência de cadeiras e investigação em Matemática, fundamentalmente em áreas de álgebra, dedica-se também a assuntos de divulgação e ensino.
Hugo Tavares — Professor Auxiliar do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, onde realiza investigação na área de Análise e Equações Diferenciais. Doutorado em Matemática pela Universidade de Lisboa, com título de doutoramento europeu após estágio na Universidade de Milão-Bicocca. Recebeu, em 2007, o prémio Gulbenkian Estímulo à Investigação e, em 2016, o Prémio Científico Universidade de Lisboa/Caixa Geral de Depósitos, na área de Matemática Pura e Aplicada.

SANTILLANA

Rua Mário Castelhano, 40 – Queluz de Baixo
2734-502 Barcarena, Portugal

APOIO AO PROFESSOR
Tel.: 214 246 901
apoioaoprofessor@santillana.com

APOIO AO LIVREIRO
Tel.: 214 246 906
apoioaolivreiro@santillana.com

Internet: www.santillana.pt

Impressão e Acabamento: Lidergraf

ISBN: 000-000-000-000-0
C. Produto: 000 000 000

1.ª Edição
1.ª Tiragem

Depósito Legal: 000000/17