PROPOSTAS DE RESOLUÇÃO: Exame-tipo 12.º ano de escolaridade
Matemática A

1.1 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Sendo A e B dois acontecimentos independentes , tem-se $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Assim, tem-se:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B) = 0,3 + 0,7 - 0,3 \times 0,7 = 0,79$

Opção correta: **(B)**

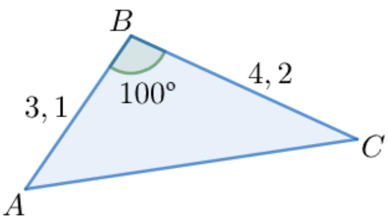
1.2 Aplicando o teorema de Carnot, tem-se:

$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{BC} \times \cos A\hat{B}C$

$\overline{AC}^2 = 3,1^2 + 4,2^2 - 2 \times 3,1 \times 4,2 \times \cos 100^\circ$

$\overline{AC} = \sqrt{3,1^2 + 4,2^2 - 2 \times 3,1 \times 4,2 \times \cos 100^\circ}$

$\overline{AC} \approx 5,6$



Opção correta: **(B)**

2. Consideremos os seguintes acontecimentos e as respetivas probabilidades:

A - aluno da escola que se desloca de autocarro

B - aluno da escola que habita a menos de dez quilómetros da escola

$P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{4}$ e $P(A|B) = \frac{1}{2}$

A probabilidade pedida é dada por $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ e tem-se:

$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) =$

$= 1 - P(A) - P(B) + P(A|B) \times P(B)$

Substituindo os valores dados, obtém-se:

$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A) - P(B) + P(A|B) \times P(B) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$

Assim, a probabilidade de um aluno dessa escola, escolhido ao acaso, não se deslocar de autocarro para a escola e não habitar a menos de dez quilómetros da escola é $37,5\%$.

3. A soma de todos os elementos da linha de ordem n do triângulo de Pascal é 2^n.
Como $2^n = 1024 \Leftrightarrow n = \log_2 1024 \Leftrightarrow n = 10$, trata-se da linha de ordem 10.
O quinto elemento da linha seguinte é $^{11}C_4 = 330$.

Opção correta: **(C)**

4.1 Sejam $P(x,y,z)$ um ponto genérico do plano mediador do segmento de reta $[AG]$ e M o ponto médio de $[AG]$. As coordenadas de M são $\left(\frac{3+(-3)}{2},\frac{0+6}{2},\frac{0+12}{2}\right)$, ou seja, $(0,3,6)$.

Os vetores $\overrightarrow{AG}$ e $\overrightarrow{MP}$ são perpendiculares, logo $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{MP} = 0$.
$\overrightarrow{AG} = G - A$ tem coordenadas $(-6,6,12)$.
$\overrightarrow{MP} = P - M$ tem coordenadas $(x, y-3, z-6)$.
$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{MP} = 0 \Leftrightarrow (-6,6,12)\cdot(x,y-3,z-6) = 0 \Leftrightarrow -6x+6y-18+12z-72 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x - y - 2z + 15 = 0$

4.2 As coordenadas do ponto de interseção da reta r com o plano FBC ficam determinadas pela conjunção das condições que definem estes conjuntos de pontos.
O plano FBC define-se por $y = 6$.

$$\begin{cases}(x,y,z)=(2,2,2)+k(3,4,6)\\ y=6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x,6,z)=(2,2,2)+k(3,4,6)\\ y=6\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=2+3k\\ 6=2+4k\\ z=2+6k\\ y=6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2+3k\\ k=1\\ z=2+6k\\ y=6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=5\\ k=1\\ z=8\\ y=6\end{cases}$$

O centro da superfície esférica é $P(5,6,8)$.
O raio da superfície esférica é igual a $\overline{PB}$.

$\overline{PB} = \sqrt{(3-5)^2+(6-6)^2+(0-8)^2} = \sqrt{68}$

O volume da esfera com centro no ponto P e cuja superfície contém o ponto B é igual a $\frac{4}{3}\times\pi\times\left(\sqrt{68}\right)^3$, cujo valor arredondado às décimas é $2348{,}8$.

4.3 O número de casos possíveis para a escolha de dois vértices do prisma é dado por ${}^{8}C_2$.

Os casos favoráveis a esses vértices serem extremos de uma diagonal de uma face do prisma é igual ao número total de diagonais das faces do prisma, ou seja, 2×6.

A probabilidade pedida é dada por $\dfrac{2\times 6}{{}^{8}C_2}$, cujo valor arredondado às milésimas é 0,429.

5. $z=\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)=e^{i\frac{\pi}{7}}$

$z^2=e^{i\frac{2\pi}{7}}$

$\overline{z^2}=e^{i\left(-\frac{2\pi}{7}\right)}$

$\operatorname{Im}\left(\overline{z^2}\right)=\sin\left(-\frac{2\pi}{7}\right)\approx -0{,}8$

Opção correta: **(A)**

6.1 $h\left(\ln(2a)\right)=e^{\ln(2a)}-e^{3\ln(2a)}=2a-e^{\ln\left((2a)^3\right)}=2a-8a^3$

Opção correta: **(D)**

6.2 $h'(x)=\left(e^x-e^{3x}\right)'=e^x-3e^{3x}$

$h'(x)=0\Leftrightarrow e^x-3e^{3x}=0\Leftrightarrow e^x\left(1-3e^{2x}\right)=0\Leftrightarrow e^x=0\vee 1-3e^{2x}=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{2x}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{3}\right)\Leftrightarrow x=\ln\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)\Leftrightarrow x=\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

x	$-\infty$	$\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$+\infty$
h'	$+$	0	$-$
h	↗	Máx. Rel.	↘

h é crescente em $\left]-\infty, \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right]$.

h é decrescente em $\left[\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right), +\infty\right[$.

$$h\left(\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)=e^{\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}-e^{3\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}=\frac{\sqrt{3}}{3}-e^{\ln\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{3}\right)}=\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\left(\sqrt{3}\right)^{3}}{27}=\frac{3\sqrt{3}}{9}-\frac{\sqrt{3}}{9}=\frac{2\sqrt{3}}{9}$$

$\frac{2\sqrt{3}}{9}$ é o máximo relativo de h (também absoluto).

6.3 Os comprimentos das bases do trapézio $[ABCD]$ são dados por

$h(t)=e^{t}-e^{3t}$

$h\left(\frac{t}{3}\right)=e^{\frac{t}{3}}-e^{3\times\frac{t}{3}}=e^{\frac{t}{3}}-e^{t}$

A altura do trapézio $[ABCD]$ é dado por

$$\left|t-\frac{t}{3}\right| \underset{-1<t<0}{=} \frac{t}{3}-t=-\frac{2t}{3}$$

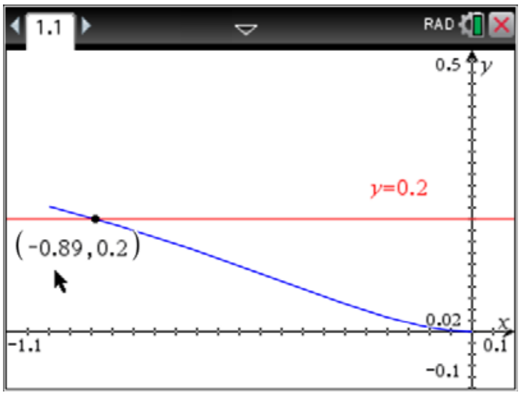
A área de $[ABCD]$ é dada , em função de t, por

$$\frac{e^{t}-e^{3t}+e^{\frac{t}{3}}-e^{t}}{2}\times\left(-\frac{2t}{3}\right)=-\frac{t}{3}\left(e^{\frac{t}{3}}-e^{3t}\right) .$$

O problema pode ser resolvido através da determinação da solução da equação $-\frac{t}{3}\left(e^{\frac{t}{3}}-e^{3t}\right)=0,2$, no intervalo $]-1,0[$.

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, obtém-se:

O valor de t para o qual a área do trapézio $[ABCD]$ é igual a $0,2$ é aproximadamente $-0,89$.



7.1 Um vetor diretor da reta r tem coordenadas $(4, 2, -2)$.

Um vetor normal ao plano α tem coordenadas $(1, -1, 1)$.

O produto escalar destes vetores é nulo $\left(4\times1+2\times(-1)+(-2)\times1=0\right)$, pelo que são perpendiculares; assim, a reta r é (estritamente) paralela ao plano α ou está contida nesse plano.

O ponto de coordendas $(1, -1, 1)$ pertence à reta, mas não pertence ao plano $(1-(-1)+1\neq1)$, logo a reta r é estritamente paralela ao plano α.

Opção correta: **(A)**

7.2 $\lim\left(\frac{n-3}{n}\right)^n=\lim\left(1+\frac{-3}{n}\right)^n=e^{-3}=\frac{1}{e^3}$

Opção correta: **(A)**

8. Sendo $\lambda\in\mathbb{R}^-$, tem-se $z=\lambda i=|\lambda|(-i)=|\lambda|e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$; logo, o afixo de $z\times w$ é a imagem do afixo de w pela rotação de centro na origem e amplitude $-\frac{\pi}{2}$, composta com a homotetia de centro na origem e razão $|\lambda|$.

Assim, para que o afixo de $z\times w$ pertença ao 1º quadrante, o afixo de w tem de pertencer ao 2º quadrante, ou seja, $\frac{\pi}{2}+2k\pi<\frac{\pi}{5}t<\pi+2k\pi\ \ (k\in\mathbb{Z})$.

$$\frac{\pi}{2}+2k\pi<\frac{\pi}{5}t<\pi+2k\pi \Leftrightarrow \frac{5}{2}+10k<t<5+10k \quad (k\in\mathbb{Z})$$

Como $t\in\left]10,20\right[$, resulta $\frac{25}{2}<t<15$.

Por outro processo:

$z=|\lambda|e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$, $w=2e^{i\left(\frac{\pi}{5}t\right)}$ e $z\times w=2|\lambda|e^{i\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{5}t\right)}$.

Para que o afixo de $z\times w$ pertença ao 1º quadrante, tem-se:

$$2k\pi<-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{5}t<\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow 2k+\frac{1}{2}<\frac{1}{5}t<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+2k \quad (k\in\mathbb{Z}) \Leftrightarrow \frac{5}{2}+10k<t<5+10k \quad (k\in\mathbb{Z})$$

Como $t\in\left]10,20\right[$, resulta $\frac{25}{2}<t<15$.

9.1 A função f é contínua em $x=0$ se tiver limite nesse ponto, ou seja, se:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\cos(2x)-1}{\sin(2x)}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0^-}\frac{\cos^2 x-\sin^2 x-1}{2\sin x\cos x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-\sin^2 x-\left(1-\cos^2 x\right)}{2\sin x\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{-2\sin^2 x}{2\sin x\cos x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-\sin x}{\cos x}=\frac{0}{1}=0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-2x}-1}{\ln(x+1)}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{e^{-2x}-1}{-2x}}{\frac{\ln(x+1)}{-2x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-2x}-1}{-2x}\times\lim_{x\to 0^+}\frac{-2x}{\ln(x+1)}=(*)$$

Cálculos auxiliares:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-2x}-1}{-2x}\underset{y=-2x}{=}\lim_{y\to 0^-}\frac{e^{y}-1}{y}=1$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{-2x}{\ln(x+1)}\underset{\substack{y=\ln(x+1)\\ x+1=e^y\\ x=e^y-1}}{=}\lim_{y\to 0^+}\frac{-2\left(e^{y}-1\right)}{y}=-2\times\lim_{y\to 0^+}\frac{e^{y}-1}{y}=-2\times 1=-2$$

$(*) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{e^{-2x}-1}{-2x} \times \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{-2x}{\ln(x+1)} = 1 \times (-2) = -2$

Como $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$, a função f não tem limite em $x=0$ e, portanto, não é contínua nesse ponto.

9.2 O gráfico da função f apenas pode ter uma assíntota não vertical, já que o seu domínio é apenas ilimitado à direita. Verifiquemos se, a existir, se trata de uma assíntota horizontal.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-2x}-1}{\ln(x+1)} = \frac{0}{+\infty} = 0$$

Conclui-se que o gráfico da função f tem uma assíntota horizontal de equação $y=0$.

9.3 $\left(g^{-1} \circ f\right)\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = g^{-1}\left(f\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$

$$f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)-1}{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{0-1}{-1} = 1$$

$$y = g(x) \Leftrightarrow y = (x-3)^2 \underset{x \in]-\infty,\, 3]}{\Leftrightarrow} -\sqrt{y} = x-3 \Leftrightarrow x = 3-\sqrt{y}$$

$$g^{-1}(x) = 3-\sqrt{x}$$

$$\left(g^{-1} \circ f\right)\left(-\frac{\pi}{4}\right) = g^{-1}\left(f\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = g^{-1}(1) = 3-\sqrt{1} = 2$$

(Em alternativa, pode ser resolvida a equação $g(x)=1$, em $]-\infty,\, 3]$.)

Opção correta: **(C)**

10.1 Se $P(X<22)=0,6$, então $P(X>22)=0,4$ e, também, $P(X<18)=0,4$ (tendo em conta que X é uma variável aleatória que segue uma distribuição normal de valor médio 20).
Assim, tem-se:

$$P(18<X<22)=1-P(X>22)-P(X<18)=1-2\times 0,4=0,2$$

Opção correta: **(A)**

10.2 O período deste oscilador harmónico é $T=\frac{2\pi}{4\pi}=\frac{1}{2}$; logo, a frequência, sendo dada por $f=\frac{1}{T}$, é 2.

Opção correta: **(B)**

11. Como f tem um extremo relativo em $x=k$ e admite derivada no seu domínio, tem-se $f'(k)=0$.

Como o gráfico da função h tem um ponto de inflexão de abcissa k e é duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$ (produto de duas funções duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$), tem-se $h''(k)=0$.

Sabe-se ainda que $f''(k)>0$.

Determinemos a segunda derivada de h:

$$h'(x)=\left(f(x)\times g(x)\right)'=f'(x)\times g(x)+f(x)\times g'(x)=f'(x)\times(1-2x)-2f(x)$$

$$h''(x)=\left(f'(x)\times(1-2x)-2f(x)\right)'=f''(x)\times(1-2x)-2f'(x)-2f'(x)=$$

$$=f''(x)\times(1-2x)-4f'(x)$$

A conjugação destas informações, permite-nos obter o valor de k:

$$h''(k)=0\Leftrightarrow f''(k)\times(1-2k)-4f'(k)=0\Leftrightarrow f''(k)\times(1-2k)-4\times 0=0$$

Como $f''(k) > 0$, obtém-se:

$$f''(k) \times (1 - 2k) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2k = 0 \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}$$

12. A soma dos seis primeiros termos de uma progressão geométrica, de primeiro termo u_1 e razão 2, é dada por $u_1 \times \dfrac{1-2^6}{1-2}$.

Assim, tem-se:

$$u_1 \times \frac{1-2^6}{1-2} = G \Leftrightarrow u_1 \times \frac{1-64}{-1} = G \Leftrightarrow u_1 = \frac{G}{63}.$$

O terceiro termo da progressão é dado por $u_3 = u_1 \times 2^2 = \dfrac{G}{63} \times 4 = \dfrac{4G}{63}$.

Opção correta: **(C)**

13. $$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{f'(x) - f'(c)} = \lim_{x \to c} \frac{\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}}{\dfrac{f'(x) - f'(c)}{x - c}} = \frac{\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}}{\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f'(x) - f'(c)}{x - c}} = \frac{f'(c)}{f''(c)}$$

$$f'(x) = (\sin(2x))' = 2\cos(2x)$$

$$f''(x) = (2\cos(2x))' = -4\sin(2x)$$

$$\frac{f'(c)}{f''(c)} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{2\cos(2c)}{-4\sin(2c)} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{-2\tan(2c)} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \tan(2c) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Como $c \in \left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[$, tem-se $2c \in]\pi, 2\pi[$ e:

$$\tan(2c) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow 2c = 2\pi - \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow 2c = \frac{11\pi}{6} \Leftrightarrow c = \frac{11\pi}{12}$$

FIM