EXAME-TIPO 12.º ANO DE ESCOLARIDADE
MATEMÁTICA A

Caderno 1: 75 minutos. **Tolerância:** 15 minutos.
É permitido o uso de calculadora.

Utiliza apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro e transferidor.

Só é permitido o uso de calculadora no Caderno 1.

Não é permitido o uso de corretor.

Risca aquilo que pretendes que não seja classificado.

Apresenta as tuas respostas de forma legível.

Apresenta apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário.

As cotações dos itens de cada caderno encontram-se no final do respetivo caderno.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, seleciona a opção correta.

Escreve, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresenta todos os cálculos que tiveres de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresenta sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$ ou $(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ ou $\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$

($k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$)

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\, e^u$

$(a^u)' = u'\, a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

1.

Os dois itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.
O **item 1.1** integra-se nos Programas de Matemática A, de 10º, 11º e 12º anos, homologados em 2001 e 2002 (**P2001/2002**).
O **item 1.2** integra-se no Programa e Metas Curriculares de Matemática A, homologado em 2015 (**PMC2015**).
Responde apenas a um dos dois itens.
Na tua folha de respostas, identifica claramente o item selecionado.

P2001/2002

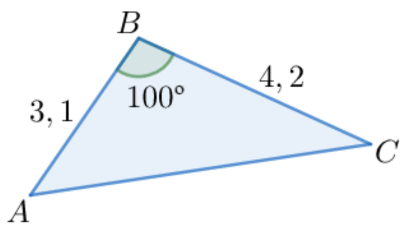
1.1 Seja Ω o espaço de resultados associado a uma determinada experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos independentes desse espaço de resultados.
Sabe-se que $P(A)=0{,}3$ e $P(B)=0{,}7$.

Qual é o valor de $P(A\cup B)$?

(A) 1 **(B)** 0,79 **(C)** 0,21 **(D)** 0

PMC2015

1.2 Na figura ao lado, está representado o triângulo $[ABC]$, em que $\overline{AB}=3{,}1$, $\overline{BC}=4{,}2$ e $A\hat{B}C=100^{\circ}$.
Qual é o valor de $\overline{AC}$, arredondado às décimas?



(A) $5{,}7$ **(B)** $5{,}6$

(C) $4{,}8$ **(D)** $4{,}7$

2. Dos alunos de uma escola, sabe-se que:

- metade se desloca para a escola de autocarro;
- um quarto habita a menos de dez quilómetros da escola;
- metade dos que habitam a menos de dez quilómetros da escola desloca-se para a escola de autocarro.

Determina a probabilidade de um aluno dessa escola, escolhido ao acaso, não se deslocar de autocarro para a escola e não habitar a menos de dez quilómetros da escola.

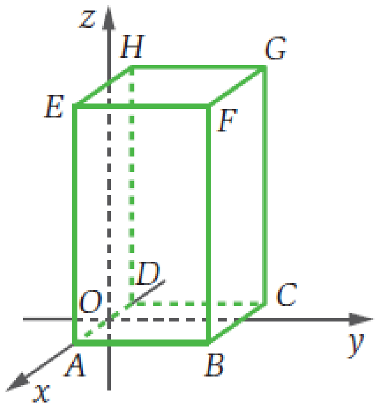
Apresenta o resultado em percentagem.

3. A soma de todos os elementos de uma linha do triângulo de Pascal é 1024.

Qual é o quinto elemento da linha seguinte?

(A) 210 **(B)** 252 **(C)** 330 **(D)** 462

4. Na figura ao lado, está representado, em referencial ortonormado do espaço, o prisma reto $[ABCDEFGH]$, de bases quadradas paralelas ao plano xOy. As coordenadas dos vértices A, B e G são, respetivamente, $(3,0,0)$, $(3,6,0)$ e $(-3,6,12)$.



4.1. Obtém uma equação cartesiana do plano mediador do segmento de reta $[AG]$.

Apresenta essa equação na forma $ax+by+cz+d=0$.

4.2. Seja r a reta de equação $(x,y,z)=(2,2,2)+k(3,4,6)$ $(k \in \mathbb{R})$ e seja P o ponto de interseção da reta r com o plano FBC.

Determina o volume da esfera com centro no ponto P e cuja superfície contém o ponto B.

Apresenta o valor pedido na forma de dízima, arredondado às décimas.

Em cálculos intermédios, utiliza valores exatos.

4.3. Escolhem-se, aleatoriamente, dois vértices do prisma.

Determina a probabilidade de esses vértices serem extremos de uma diagonal de uma face do prisma.

Apresenta o valor pedido na forma de dízima, arredondado às milésimas.

5. Considera, em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, o número $z=\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$.

Qual é o valor, arredondado às décimas, de $\operatorname{Im}\left(\overline{z^2}\right)$?

(A) $-0{,}8$ **(B)** $-0{,}2$ **(C)** $0{,}2$ **(D)** $0{,}8$

6. Seja h a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x) = e^x - e^{3x}$.

6.1. Seja a um número real positivo. Qual é o valor de $h(\ln(2a))$?

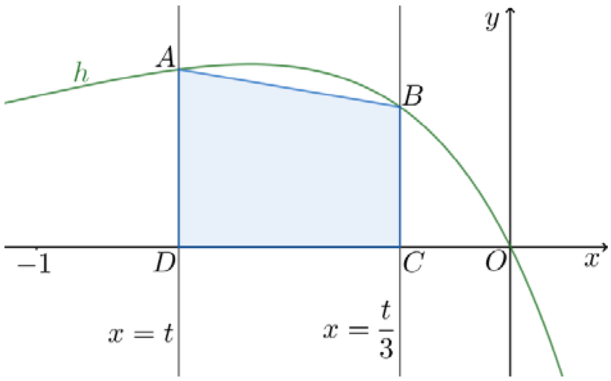
(A) $-4a$ **(B)** $-6a$ **(C)** $2a-6a^3$ **(D)** $2a-8a^3$

6.2. Estuda a função h quanto à monotonia e determina, caso existam, os respetivos extremos relativos.

Apresenta os valores de eventuais extremos relativos na forma $\frac{a\sqrt{b}}{c}$.

6.3. Na figura seguinte, estão representados, em referencial ortonormado do plano:

- parte do gráfico da função h ;
- as retas verticais de equações $x=t$ e $x=\frac{t}{3}$, sendo $-1<t<0$;
- o trapézio $[ABCD]$, em que A e B são os pontos de interseção das retas verticais com o gráfico da função h e C e D são os pontos de interseção dessas retas com o eixo Ox.



Determina, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o valor de t para o qual a área do trapézio $[ABCD]$ é igual a $0,2$, sabendo-se que esse valor existe e é único.

Não justifiques a validade do resultado obtido na calculadora.

Na tua resposta:

- mostra que a área do trapézio $[ABCD]$ é dada, em função de t, por $-\frac{t}{3}\left(e^{\frac{t}{3}}-e^{3t}\right)$;
- equaciona o problema;
- reproduz, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que te permite(m) resolver a equação;
- apresenta o valor de t arredondado às centésimas.

FIM DO CADERNO 1

Item	1.1.	1.2	2.	3.	4.1.	4.2.	4.3.	5.	6.1.	6.2.	6.3.	Subtotal
Cotação	8		12	8	12	12	13	8	8	12	12	**105**

Caderno 2: 75 minutos. **Tolerância:** 15 minutos.
Não é permitido o uso de calculadora.

7.

Os dois itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.
O **item 7.1** integra-se nos Programas de Matemática A, de 10º, 11º e 12º anos, homologados em 2001 e 2002 (**P2001/2002**).
O **item 7.2** integra-se no Programa e Metas Curriculares de Matemática A, homologado em 2015 (**PMC2015**).
Responde apenas a um dos dois itens.
Na tua folha de respostas, identifica claramente o item selecionado.

P2001/2002

7.1 Considera, relativamente a um referencial ortonormado $Oxyz$, a reta r e o plano α definidos como se segue:

$$r: \frac{x-1}{4}=\frac{y+1}{2}=-\frac{z-1}{2} \quad \text{e} \quad \alpha: x-y+z=1$$

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) A reta r é estritamente paralela ao plano α.

(B) A reta r é concorrente e oblíqua ao plano α.

(C) A reta r é perpendicular ao plano α.

(D) A reta r está contida no plano α.

PMC2015

7.2 Qual é o valor de $\lim\left(\frac{n-3}{n}\right)^n$?

(A) $\frac{1}{e^3}$ **(B)** 1 **(C)** e^3 **(D)** $+\infty$

8. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considera os números complexos z e w tais que:

$$z=\lambda i \ \ (\text{com } \lambda\in\mathbb{R}^-) \ \text{ e } \ w=2\cos\left(\frac{\pi}{5}t\right)+2i\sin\left(\frac{\pi}{5}t\right) \ \ (\text{com } t\in\left]10,20\right[)$$

Determina para que valores de t o afixo de $z\times w$ pertence ao 1º quadrante.

9. Seja f a função, de domínio $\left]-\frac{\pi}{2},+\infty\right[$, definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos(2x)-1}{\sin(2x)} & \text{se } -\dfrac{\pi}{2}<x<0\\ 0 & \text{se } x=0\\ \dfrac{e^{-2x}-1}{\ln(x+1)} & \text{se } x>0\end{cases}$$

9.1 Averigua se a função f é contínua em $x=0$.

9.2 Estuda a função f quanto à existência de assíntotas não verticais ao seu gráfico.

Em caso de existência, escreve, para cada assíntota, uma equação que a defina.

9.3 Seja g a função, de domínio $]-\infty, 3]$, definida por $g(x)=(x-3)^2$.

Qual é o valor de $(g^{-1}\circ f)\left(-\frac{\pi}{4}\right)$?

(A) -1 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 4

10.

Os dois itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.
O **item 10.1** integra-se nos Programas de Matemática A, de 10.º, 11.º e 12.º anos, homologados em 2001 e 2002 (**P2001/2002**).
O **item 10.2** integra-se no Programa e Metas Curriculares de Matemática A, homologado em 2015 (**PMC2015**).
Responde apenas a um dos dois itens.
Na tua folha de respostas, identifica claramente o item selecionado.

P2001/2002

10.1 Seja X uma variável aleatória que segue uma distribuição normal de valor médio 20.

Admite que $P(X<22)=0,6$.

Qual é o valor de $P(18<X<22)$?

(A) 0,2 **(B)** 0,4 **(C)** 0,6827 **(D)** 0,9545

10.2 Um ponto oscila, ao longo de uma reta numérica, com movimento harmónico simples dado pelo seguinte modelo:

$$x(t) = 7\cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$$

em que $x(t)$ é a abcissa do ponto em cada instante $t \in [0,3[$ (em segundos).

Qual é o número de oscilações por segundo, ou seja, a frequência, deste oscilador harmónico?

(A) $\frac{1}{2}$ **(B)** 2 **(C)** $\frac{1}{4\pi}$ **(D)** 4π

11. Sejam f uma função, de domínio $\mathbb{R}$, duas vezes diferenciável, g a função polinomial definida por $g(x) = 1 - 2x$ e h a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x) = f(x) \times g(x)$.

Sabe-se que:

- a função f tem um extremo relativo em $x = k$ $(k \in \mathbb{R})$ e $f''(k) > 0$;
- o gráfico da função h tem um ponto de inflexão de abcissa k.

Determina o valor de k.

12. A soma dos seis primeiros termos de uma progressão geométrica de razão 2 é G $(G > 0)$.

Qual é o terceiro termo dessa progressão?

(A) $\frac{4G}{31}$ **(B)** $\frac{8G}{31}$ **(C)** $\frac{4G}{63}$ **(D)** $\frac{8G}{63}$

13. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x)=\sin(2x)$.

Sabe-se que $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)-f(c)}{f'(x)-f'(c)}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, em que $c\in\left]\dfrac{\pi}{2},\pi\right[$.

Determina o valor de c.

FIM

Item	**7.1.**	**7.2**	**8.**	**9.1**	**9.2.**	**9.3.**	**10.1.**	**10.2.**	**11.**	**12.**	**13.**	**Subtotal**
Cotação	8		12	13	12	8	8		13	8	13	**95**

Total (Caderno 1 + Caderno 2): **200** pontos