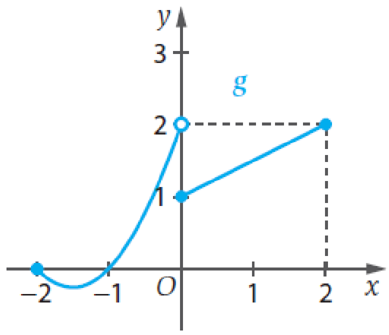
BANCO DE QUESTÕES – MATEMÁTICA A 12.º ANO

DOMÍNIO: Funções reais de variável real

1. Seja g a função, de domínio $[-2,2]$, representada graficamente na figura ao lado, e seja (u_n) a sucessão definida por $-\frac{1}{n}$.



Qual é o valor de $\lim g(u_n)$?

(A) -1 **(B)** 0 **(C)** 1 **(D)** 2

2. Calcula $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)\times\sin(\pi x)\right)$.

Na tua resposta, utiliza o teorema das funções enquadradas.

3. Seja s a reta de equação $(x,y)=(1,2)+k(-2,1),\ k\in\mathbb{R}$.

Sabe-se que a reta s é tangente ao gráfico de uma função, f, no ponto de abcissa 3.

3.1 Qual é o valor de $f'(3)$?

(A) -2 **(B)** $-\frac{1}{2}$ **(C)** $\frac{1}{2}$ **(D)** 2

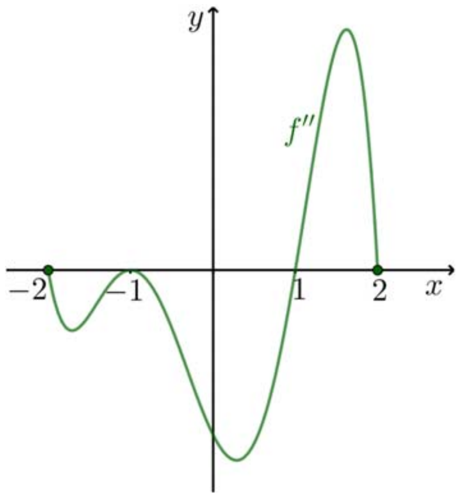
3.2 Qual é o valor de $f(3)$?

(A) -1 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3

4. Na figura seguinte, está representada graficamente f'', a segunda derivada de uma função f, de domínio $[-2,2]$.

Os zeros da função f'' são -2, -1, 1 e 2.

Seja f' a primeira derivada de f.



4.1 Qual das proposições seguintes é verdadeira?

(A) A função f' é crescente no intervalo $]-2, -1[$.

(B) A função f' é crescente no intervalo $]-1, 0[$.

(C) A função f' é decrescente no intervalo $]0, 1[$.

(D) A função f' é decrescente no intervalo $]1, 2[$.

4.2 Qual das proposições seguintes é verdadeira?

(A) A concavidade do gráfico de f é voltada para cima no intervalo $]-2, -1[$.

(B) A concavidade do gráfico de f é voltada para cima no intervalo $]-1, 0[$.

(C) A concavidade do gráfico de f é voltada para baixo no intervalo $]0, 1[$.

(D) A concavidade do gráfico de f é voltada para baixo no intervalo $]1, 2[$.

4.3 Quantos pontos de inflexão tem o gráfico da função f ?

(A) 1 **(B)** 2 **(B)** 3 **(B)** 4

5. Determina uma expressão analítica da segunda derivada de cada uma das funções, reais de variável real, definidas por:

5.1 $f(x)=\sqrt{x-1}(x-1)$ **5.2** $g(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x+1}$

6. Seja g a função definida, em $\mathbb{R}_0^-$, por

$$g(x)=\frac{x^3-2x^2-11x+12}{x^2-9}$$

Estuda a função g quanto à existência de assíntotas ao seu gráfico.

Na tua resposta, apresenta as equações das assíntotas, caso existam.

7. Considera a função f definida, em $[0,+\infty[$, por $f(x)=\sqrt{x}\left(x^3-2x+1\right)$.

O gráfico da função f tem exatamente um ponto de inflexão.

7.1 Mostra, utilizando o teorema de Bolzano-Cauchy, que a abcissa desse ponto de inflexão pertence ao intervalo $]0,4;\,0,5[$.

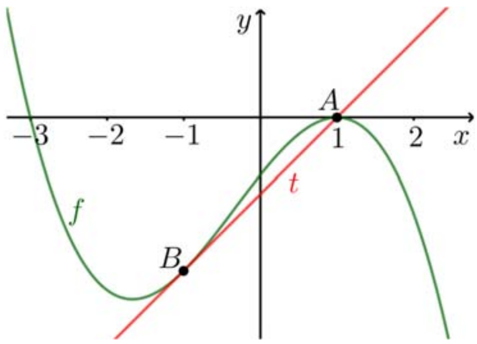
7.2 Determina, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, a abcissa do ponto de inflexão.

Na tua resposta:

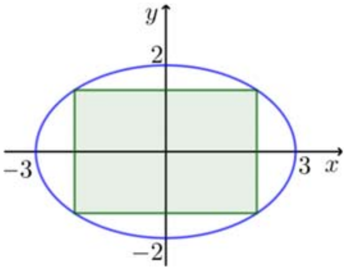
- equaciona o problema;
- reproduz, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualidado(s) na calculadora que te permite(m) resolver a equação;
- apresenta o valor pedido arredondado às centésimas.

8. Na figura ao lado, estão representadas graficamente a função f, polinimial, definida por $f(x)=-x^3-x^2+5x-3$, e a reta t, tangente ao gráfico de f no ponto B. A reta t também interseta o gráfico de f no ponto A, de abcissa 1.

Determina as coordenadas do ponto B.



9. Determina a área do retângulo de maior área inscrito na elipse de equação $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$, cujos lados são paralelos aos eixos da elipse.



DOMÍNIO: Trigonometria e funções trigonométricas

10. A equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x)=\sin(2x)$, no ponto de abcissa $\frac{\pi}{2}$ é:

(A) $y=x-\frac{\pi}{2}$ **(B)** $y=-x+\frac{\pi}{2}$

(C) $y=2x-\pi$ **(D)** $y=-2x+\pi$

11. A função derivada de uma função f, de domínio $\mathbb{R}$, é definida por

$$f'(x)=\cos(2x)$$

11.1 Qual das seguintes expressões pode definir a função f ?

(A) $f(x)=\sin x\cos x$ **(B)** $f(x)=\sin(2x)$

(C) $f(x)=-\sin x\cos x$ **(D)** $f(x)=-\sin(2x)$

11.2 Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{6}}\dfrac{f(x)+\frac{\sqrt{3}}{4}}{x+\frac{\pi}{6}}$?

(A) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **(B)** $-\frac{1}{2}$ **(C)** $\frac{1}{2}$ **(D)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

12. Seja h a função definida, no seu domínio de existência, por $h(x)=\tan\left(\frac{1}{x}\right)$.

12.1 O domínio da função h é:

(A) $\left\{x\in\mathbb{R}:\ x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

(B) $\left\{x\in\mathbb{R}:\ x\neq 0\wedge x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

(C) $\left\{x\in\mathbb{R}:\ x\neq\frac{2}{\pi+2k\pi},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

(D) $\left\{x\in\mathbb{R}:\ x\neq 0\wedge x\neq\frac{2}{\pi+2k\pi},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

12.2 Uma expressão analítica da função derivada de h é:

(A) $h'(x)=-\frac{\tan^2\left(\frac{1}{x}\right)+1}{x^2}$

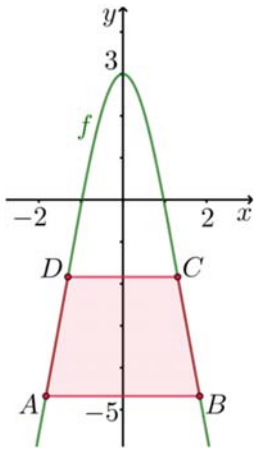
(B) $h'(x)=\frac{\tan^2\left(\frac{1}{x}\right)+1}{x^2}$

(C) $h'(x)=-\frac{1}{\cos^2\left(\frac{1}{x}\right)}$

(D) $h'(x)=\frac{1}{\cos^2\left(\frac{1}{x}\right)}$

13. Na figura ao lado, estão representados, em referencial o.n. Oxy, parte do gráfico da função real de variável real f, definida por $f(x)=\cos(2x)-\sqrt{3}x^2+3$, e o trapézio $[ABCD]$, cujos vértices são os pontos de inflexão do gráfico de f, cujas abcissas pertencem ao intervalo $]-2,2[$.

Determina a área do trapézio $[ABCD]$.



14. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x-\pi)}{x^2+x} & \text{se } x>0\\ -1 & \text{se } x=0\\ \dfrac{4x^2-x}{-3x^2+x} & \text{se } x<0\end{cases}$$

14.1 Averigua se a função g é contínua em $x=0$.

14.2 Averigua se a função g é diferenciável em $x=0$. Em caso afirmativo, indica o valor de $g'(0)$.

14.3 Estuda a função g quanto à existência de assíntotas horizontais ao seu gráfico.

14.4 Sabe-se que função g tem um máximo relativo no intevalo $[4,5]$.

Determina, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o valor desse máximo relativo.

Na tua resposta:

- determina uma expressão da função derivada da função g;
- equaciona o problema;
- reproduz, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualidado(s) na calculadora que te permite(m) resolver a equação;
- justifica que se trata de um máximo relativo;
- apresenta o valor pedido arredondado às centésimas.

DOMÍNIO: Funções exponenciais e funções logarítmicas

15. Seja k um número real tal que a sucessão (u_n), definida por $u_n=\left(\dfrac{n-k}{n}\right)^n$, tem limite igual a $\sqrt{e}$.

Qual é o valor de k ?

(A) -2 **(B)** $-\dfrac{1}{2}$ **(C)** $\dfrac{1}{2}$ **(D)** 2

16. Foram aplicados 1800 euros numa aplicação financeira com regime de juro composto à taxa semestral de 1%.

Qual das seguintes expressões dá o capital acumulado ao fim de n anos?

(A) $1800\left(1+\frac{1}{100}\right)^{n}$ **(B)** $1800\left(1+\frac{2}{100}\right)^{n}$

(C) $1800\left(1+\frac{1}{100}\right)^{2n}$ **(D)** $1800\left(1+\frac{2}{100}\right)^{2n}$

17. Seja a o número real tal que $3a=\log_7 9$.

Qual é o valor de 49^a ?

(A) $\sqrt{18}$ **(B)** $\sqrt{729}$ **(C)** $\sqrt[3]{18}$ **(D)** $\sqrt[3]{81}$

18. Seja b um número real positivo.

Qual das seguintes expressões é equivalente a $\log_5 \frac{125}{\sqrt{b}} - \log_5(5b)$?

(A) $-\log_5 b$ **(B)** $\log_5 b$ **(C)** $2-\frac{3}{2}\log_5 b$ **(D)** $2+\frac{1}{2}\log_5 b$

19. Qual dos seguintes limites é finito?

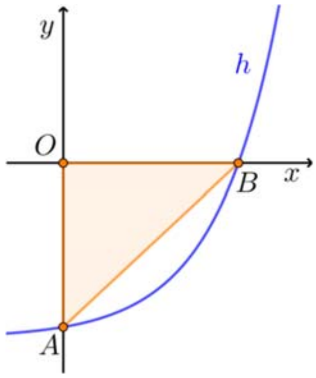
(A) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{\pi}{e}\right)^{x}$ **(B)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{e}{\pi}\right)^{x}$ **(C)** $\lim\limits_{x\to-\infty}(\pi-e)^{x}$ **(D)** $\lim\limits_{x\to-\infty}(e+\pi)^{-x}$

20. Qual é o domínio da função real de variável real, f, definida por $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{x+1}\right)$?

(A) $]-\infty, -1[\cup]0,+\infty[$ **(B)** $]-1, 0[$

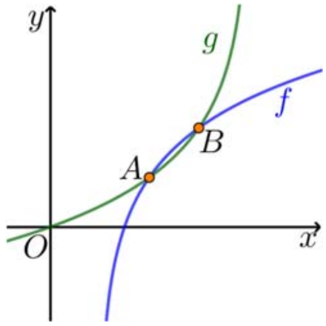
(C) $]-\infty, 0[\cup]1,+\infty[$ **(D)** $]0, 1[$

21. Na figura ao lado, estão representados, em referencial o.n. Oxy, parte do gráfico da função real de variável real h, definida por $h(x)=2^{x-2}-4$, e o triângulo $[ABO]$, em que A e B são os pontos de interseção do gráfico de h com os eixos coordenados.



Determina o perímetro do triângulo $[ABO]$.

22. Na figura ao lado, estão representadas graficamente, em referencial o.n. Oxy, as funções f e g, reais de variável real, definidas por $f(x)=\log_2(x-1)+1$ e $g(x)=\log_{\frac{1}{2}}(4-x)+2$. Os pontos A e B são os pontos de interseção dos gráficos de f e g.



22.1 Determina o domínio de existência de cada função.

22.2 Determina o zero da função f.

22.3 Estudas as funções f e g quanto à existência de assíntotas ao seu gráfico.

Na tua resposta, apresenta as equações das assíntotas, caso existam.

22.4 Determina a distância entre os pontos A e B.

23. Seja h a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x^2-x} & \text{se } x<0\\[2mm] \dfrac{x-1}{x+1} & \text{se } x\geq 0\end{cases}$$

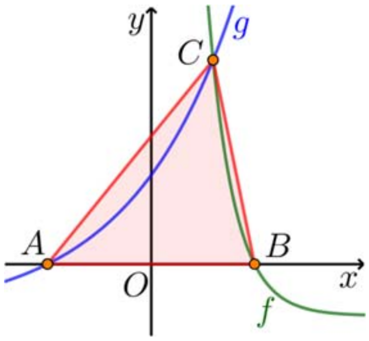
23.1 Averigua se a função h é contínua em $x=0$.

23.2 Estuda a função h quanto à existência de assíntotas ao seu gráfico.

Na tua resposta, apresenta as equações das assíntotas, caso existam.

24. Na figura ao lado, estão representados, em referencial o.n. Oxy:

- as funções f e g, de domínio $\mathbb{R}$, definidas por $f(x)=e^{-2x+4}-1$ e $g(x)=e^{\frac{1}{2}x+1}-1$;
- o triângulo $[ABC]$, em que A e B são os pontos de interseção dos gráficos de f e g com o eixo das abcissas e C é o ponto de interseção dos gráficos.



Determina a área do triângulo $[ABC]$.

25. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x)=\ln x$ e seja f a função quadrática definida por $f(x)=x^2-4$.

O domínio da função $g \circ f$ é:

(A) $]-2, 2[$ **(B)** $]-\infty, -2[\cup]2,+\infty[$

(C) $[-2, 2]$ **(D)** $]-\infty, -2]\cup[2,+\infty[$

26. Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{e^{x-3}-1}$?

(A) 1 **(B)** 3 **(C)** 6 **(D)** 9

27. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x)=2^x x^2$.

27.1 Mostra, recorrendo ao teorema de Lagrange, que existe um ponto do intervalo $]-4,-2[$ em que a derivada da função g é nula.

27.2 Mostra, recorrendo o teorema de Bolzano-Cauchy, que a equação $g(x)=1$ tem uma solução no intervalo $]0,1[$.

27.3 Determina, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, a solução da equação $g(x)=1$ no intervalo $]0,1[$, que se sabe ser única.

Na tua resposta:

- reproduz, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que te permite(m) resolver a equação;
- apresenta o valor pedido arredondado às centésimas.

27.4 Sabe-se que o gráfico da função g tem uma única reta tangente com declive 2 no intervalo $]0,1[$.

Determina, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, a abcissa do ponto de tangência dessa reta.

Na tua resposta:

- equaciona o problema;
- reproduz, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que te permite(m) resolver a equação;
- apresenta o valor pedido arredondado às centésimas.

28. Uma chávena de café foi servida a um cliente de um restaurante à temperatura de $80\,°C$. A temperatura ambiente da sala do restaurante onde o café foi servido era $20\,°C$.

Sabe-se que a expressão que dá a temperatura do café em função do tempo, em minutos, decorrido desde que foi servido ($t=0$) é da forma:

$$T(t)=T_A+ae^{bt},\quad a,b\in\mathbb{R}$$

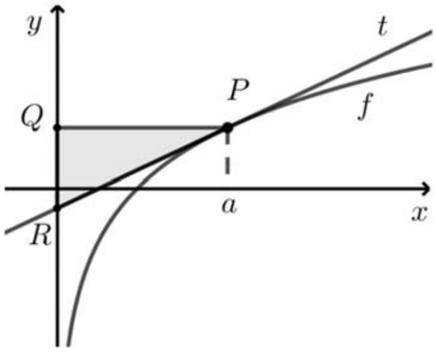
Sabe-se que, 10 minutos depois de o café ter sido servido, a sua temperatura passou a ser $45\,°C$.

Determina os valores das constantes a e b.

Apresenta o valor de b com arredondado às milésimas.

29. Na figura seguinte, estão representados, em referencial o.n. Oxy:

- parte do gráfico da função f, real de variável real, definida por $f(x) = \ln x$;
- a reta t, tangente ao gráfico de f no ponto P, de abcissa a, com $a > 0$;
- o triângulo $[PQR]$, sendo a reta PQ paralela ao eixo Ox e o vértice R o ponto de interseção da reta t com o eixo das ordenadas.



Mostra que o valor da área do triângulo $[PQR]$ é igual a $\frac{a}{2}$, para qualquer $a > 0$.

SOLUÇÕES

Funções reais de variável real

1. (D)

2. 0

3.1 (B)

3.2 (B)

4.1 (C)

4.2 (C)

4.3 (A)

5.1 $f''(x)=\dfrac{3}{4\sqrt{x-1}}$

5.2 $f''(x)=\dfrac{-2x^2-x+1}{(x+1)^2(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}$

6.2 O gráfico da função g tem apenas uma assíntota (oblíqua) de equação $y=x-2$.

7.2 $0,48$

8. $(-1,-8)$

9. 12

Trigonometria e funções trigonométricas

10. (D)

11.1 (A)

11.2 (C)

12.1 (D)

12.2 (A)

13. $\dfrac{\sqrt{3}}{6}\pi^3$

14.1 g é contínua em $x=0$.

14.2 g é diferenciável em $x=0$; $g'(0)=1$.

14.3 O gráfico de g tem duas assíntotas horizontais de equações $x=-\dfrac{4}{3}$ e $x=0$.

14.4 $0,04$

Funções exponenciais e funções logarítmicas

15. (B)

16. (C)

17. (D)

18. (C)

19. (A)

20. (A)

21. $\dfrac{\sqrt{481}+31}{4}$

22.1 $D_f=]1,+\infty[$; $D_g=]-\infty,4[$

22.2 $\dfrac{3}{2}$

22.3 O gráfico de f tem uma assíntota vertical de equação $x=1$ e o gráfico de g tem uma assíntota vertical de equação $x=4$.

22.4 $\sqrt{2}$

23.1 A função h é contínua em $x=0$.

23.2 O gráfico de h tem duas assíntotas horizontais de equações $x=0$ e $x=1$.

24. $2e^{\frac{8}{5}}-2$.

25. (B)

26. (C)

27.3. $0,77$

27.4 $0,57$

28. $a=60$ e $b\approx-0,088$.