TESTE DE AVALIAÇÃO DE MATEMÁTICA - 12.º ANO
PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

1.

Hipótese A – números terminados em 0: $4!=24$ casos possíveis;

Hipótese B – números terminados em 6 ou 8: $3\times 3\times 2\times 2=36$ casos possíveis;

Total de casos possíveis: $24+36=60$.

Opção correta: (C)

2. Se os 10.º e 11.º elementos de uma certa linha do triângulo de Pascal são iguais, a linha tem 20 elementos, ou seja, trata-se da linha correspondente a ${}^{19}C_p$, com $0\le p\le 19$; portanto, o 11.º elemento da linha seguinte é ${}^{20}C_{10}=184\ 756$.
Opção correta: (C)

3.1 Sejam os acontecimentos A: «A bola retirada é amarela» e B: «A bola retirada tem número par»;

A probabilidade pedida é a probabilidade condicionada $P(A|B)$:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A)\times P(B|A)}{P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)}=\frac{P(A)\times P(B|A)}{P(A)\times P(B|A)+P(\overline{A})\times P(B|\overline{A})}=$$

$$=\frac{\frac{1}{3}\times\frac{1}{10}}{\frac{1}{3}\times\frac{1}{10}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}}=\frac{1}{11}$$

3.2 Número de casos possíveis: ${}^{120}C_3=280\ 840$

Casos favoráveis: a caixa tem 120 bolas, das quais um terço são amarelas; a caixa tem, portanto, 40 bolas amarelas e 80 bolas brancas. Para que o número de bolas amarelas retiradas seja superior ao número de bolas brancas retiradas, há duas hipóteses: retirar três bolas amarelas ou retirar duas bolas amarelas e uma branca.

Números de casos favoráveis: ${}^{40}C_3+{}^{40}C_2\times{}^{80}C_1=72\ 280$

$$P=\frac{72\,280}{280\,840}\approx 0,26$$

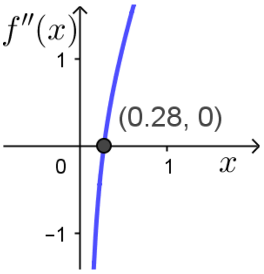
4.1

$$f(x)=\frac{x^3+\sqrt{x}}{2}=\frac{x^3+x^{\frac{1}{2}}}{2};\ f'(x)=\frac{3x^2+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{2};\ f''(x)=\frac{6x-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}}{2}=3x-\frac{1}{8\sqrt{x^3}}.$$

$f''(0,2)\approx -0,8$; $f''(0,3)\approx 0,1$;

como f é contínua em $[0,+\infty[$ e, particularmente, em $[0,2;\ 0,3]$, sendo $f''(0,2)\times f''(0,3)<0$, o Teorema de Bolzano-Cauchy garante a existência de pelo menos um zero de f'' no intervalo $]0,2;\ 0,3[$, no qual f'' muda de sinal; como é dito que o gráfico da função f tem exatamente um ponto de inflexão, está mostrado que a abcissa desse ponto pertence ao intervalo $]0,2;\ 0,3[$.

4.2



$x\approx 0,28$

5. A soma dos coeficientes binomiais é $\sum_{p=0}^{100} {}^{100}C_p = 2^{100}$.

Opção correta: (B)

6. A opção **(A)** é falsa. Apesar de -3 ser um zero de f'', f'' não muda de sinal nesse ponto, pelo que o gráfico da função f não tem um ponto de inflexão de abcissa -3 .

A opção **(B)** é falsa. A concavidade do gráfico de f é voltada para cima no intervalo $]-3,\ 2[$, uma vez que f'' é positiva nesse intervalo.

A opção **(C)** é falsa. f'' é positiva em $]-5,\ -3[$, pelo que f' é crescente nesse intervalo.

A opção **(D)** é verdadeira. f'' é positiva em $]-3,\ 2[$, pelo que f' é crescente nesse intervalo.

Opção correta: (D)

7.

$\lim(u_n) = \lim\left(\frac{2}{n} - 1\right) = -1^+$, portanto, $\lim f(u_n) = \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = 0$.

Opção correta: (B)

8.

$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$; logo, $P(A) - P(A \cap B) = P(A \cap \overline{B})$

$P(\overline{B}) = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap \overline{B})$; logo, $P(\overline{B}) - P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(A \cap \overline{B})$

Portanto, $P(A) - P(A \cap B) = P(\overline{B}) - P(\overline{A} \cap \overline{B})$.

Outro processo:

$$P(\overline{B}) - P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(B) - P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(B) - (1 - P(A \cup B)) =$$
$$= 1 - P(B) - 1 + P(A \cup B) = -P(B) + (P(A) + (B) - P(A \cap B)) =$$
$$= P(A) - P(A \cap B)$$

9. Quando $x \to +\infty$, $-1 \le \cos(\pi x) \le 1$, pelo que $-\frac{3x+1}{2x^2-2} \le \frac{3x+1}{2x^2-2} \times \cos(\pi x) \le \frac{3x+1}{2x^2-2}$.

Como $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(-\frac{3x+1}{2x^2-2}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x+1}{2x^2-2} = 0$, tem-se, pelo Teorema das funções enquadradas,

$\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\frac{3x+1}{2x^2-2} \times \cos(\pi x)\right) = 0$.

10.1 $d'(t) = -9{,}8t$; $d'(1) = -9{,}8$.

A velocidade da pedra 1 segundo após o instante em que foi lançada era de $-9{,}8 \text{ m/s}$.

10.2 A aceleração da pedra durante o seu movimento é dada por $d''(t)$.

$d''(t) = -9{,}8$, donde se conclui que a aceleração é constante ($-9{,}8 \text{m/s}^2$).

11.

Assíntotas verticais:

$D_g = \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\} = [0, +\infty[\setminus \{1\}$; portanto, como g é uma função contínua, a única assíntota vertical que pode existir terá equação $x = 1$. Vejamos:

$\lim\limits_{x \to 1} \frac{3x^2 - x}{x - 1} = \frac{2}{0}$; estudemos, então, os limites laterias: $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{3x^2 - x}{x - 1} = \frac{2}{0^-} = -\infty$ e

$\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{3x^2 - x}{x - 1} = \frac{2}{0^+} = +\infty$; confirma-se, então, a existência de assíntota (bilateral) ao gráfico, de

equação $x = 1$.

Assíntotas não verticais:

Existe, no máximo, uma assíntota não vertical, quando $x \to +\infty$. Vejamos:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 - x}{x^2 - x} = 3;$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(g(x) - 3x\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3x^2 - x}{x - 1} - 3x\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3x^2 - x - 3x^2 + 3x}{x - 1}\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x}{x - 1}\right) = 2;$$

conclui-se, assim, que a reta de equação $y = 3x + 2$ é assíntota ao gráfico da função.

Tendo em consideração o domínio da função, não faz sentido estudar as assíntotas não verticais quando $x \to -\infty$.

FIM