TESTE DE AVALIAÇÃO DE MATEMÁTICA

12.º ANO

- O teste é constituído por **dois grupos** (I e II).
- Utiliza apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.
- **Só é permitido o uso de calculadora no Grupo I**.
- Para cada resposta, identifica o item. Apresenta as tuas respostas de forma legível. Apresenta apenas uma resposta para cada item. Risca o que pretendes que não seja classificado.
- O teste inclui um **formulário**.
- As **cotações** dos itens encontram-se no final do teste.
- Na resposta aos **itens de escolha múltipla**, escreve apenas na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida
- Na resposta aos restantes itens, apresenta todas as justificações e cálculos necessários.

GRUPO I

Duração: 40 minutos

É permitido o uso de calculadora.

1. Quantos números pares de quatro algarismos diferentes se podem escrever, utilizando os algarismos do número $98\,760$?

(A) 18 **(B)** 36 **(C)** 60 **(D)** 108

2. Os 10.º e 11.º elementos de uma certa linha do triângulo de Pascal são iguais.

Qual é o 11.º elemento da linha seguinte?

(A) $92\,378$ **(B)** $167\,960$ **(C)** $184\,756$ **(D)** $352\,716$

3. Uma caixa contém apenas bolas amarelas e bolas brancas, indistinguíveis ao tato. Todas as bolas estão numeradas com **um único** número natural.

Sabe-se que:

- uma em cada três bolas são amarelas;
- 10% das bolas amarelas têm um número par;
- 50% das bolas brancas têm um número ímpar.

3.1 Retira-se, ao acaso, uma bola dessa caixa.

Qual é a probabilidade de essa bola ser amarela, sabendo que tem um número par?

Apresenta o resultado na forma de fração irredutível.

3.2 Supõe, agora, que a caixa tem 120 bolas.

Retiram-se, ao acaso e em simultâneo, três bolas dessa caixa.

Determina a probabilidade de o número de bolas amarelas retiradas ser superior ao número de bolas brancas retiradas.

Apresenta o resultado na forma de dízima, arredondado às centésimas.

4. Considera a função f definida, em $[0,+\infty[$, por $f(x)=\dfrac{x^3+\sqrt{x}}{2}$.

O gráfico da função a função f tem exatamente um ponto de inflexão.

4.1 Prova, utilizando o Teorema de Bolzano-Cauchy, que a abcissa desse ponto de inflexão pertence ao intervalo $]0,2;\ 0,3[$.

Na tua resolução, começa por mostrar que $f''(x)=3x-\dfrac{1}{8\sqrt{x^3}}$.

4.2 Determina, com recurso à máquina calculadora, o valor aproximado às centésimas, da abcissa do ponto de inflexão.

GRUPO II

Duração: 50 minutos

Não é permitido o uso de calculadora.

---

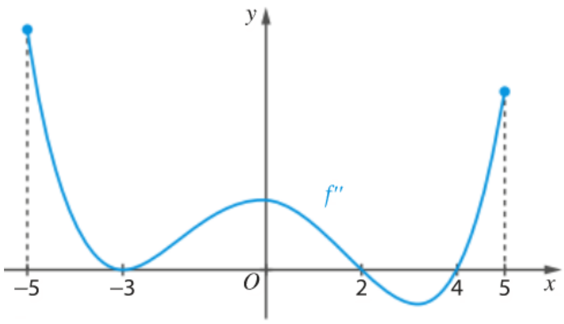
5. Do desenvolvimento de $(x+y)^{100}$ pela fórmula do Binómio de Newton resulta um polinómio reduzido.

Qual é a soma dos coeficientes dos termos desse polinómio?

(A) 2^{101} **(B)** 2^{100} **(C)** 100 **(D)** 101

6. Na figura seguinte, está representada graficamente f'', a segunda derivada de uma função f, de domínio $[-5,5]$.

Seja, ainda, f', a primeira derivada de f.



Qual das proposições seguintes é verdadeira?

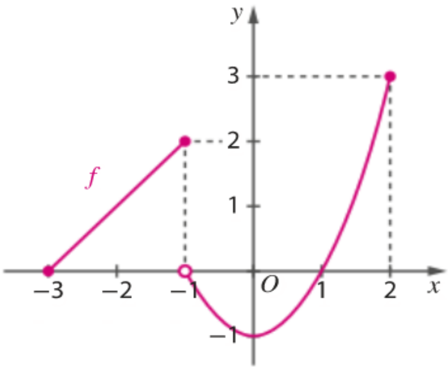
(A) O gráfico da função f tem um ponto de inflexão de abcissa -3.

(B) A concavidade do gráfico de f é voltada para baixo no intervalo $]-3, 2[$.

(C) A função f' é decrescente no intervalo $]-5, -3[$.

(D) A função f' é crescente no intervalo $]-3, 2[$.

7. Seja f a função, de domínio $[-3,2]$, representada graficamente na figura ao lado, e seja (u_n) a sucessão definida por $\frac{2}{n}-1$.



Qual é o valor de $\lim f(u_n)$?

(A) -1 **(B)** 0 **(C)** 2 **(D)** 3

8. Seja $(E, \mathcal{P}(E), P)$ um espaço de probabilidades e $A, B \in \mathcal{P}(E)$.

Prova que:

$$P(A)-P(A\cap B)=P(\overline{B})-P(\overline{A}\cap\overline{B}).$$

9. Calcula $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+1}{2x^2-2}\times\cos(\pi x)\right)$.

Na tua resolução, utiliza o Teorema das funções enquadradas.

10. Conta-se que Galileu Galilei terá deixado cair pedras da varanda mais alta da Torre de Pisa para mostrar que o tempo de queda é independente da massa dos corpos em queda.

Admite que a distância d, em metros, de uma dessas pedras ao solo é dada em função do tempo de queda, t, em segundos, desde o instante em que é lançada até ao instante em que atinge o solo, por

$$d(t) = 57 - 4{,}9t^2.$$

10.1 Determina a velocidade da pedra 1 segundo após o instante em que foi lançada.

10.2 Mostra que a aceleração da pedra durante o seu movimento é constante.

11. Seja g a função definida em $\mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$ por

$$g(x) = \frac{3x^2 - x}{x - 1}$$

Estuda a função g quanto à existência de assíntotas ao seu gráfico.

Na tua resposta, apresenta as equações das assíntotas, caso existam.

FIM

Cotações

Item	**1.**	**2.**	**3.1**	**3.2**	**4.1**	**4.2**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	**9.**	**10.1**	**10.2**	**11.**
Cotação	10	10	20	15	20	15	10	10	10	15	15	15	10	25

FORMULÁRIO

Regras de derivação

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(u^n)' = nu^{n-1}u' \quad (n \in \mathbb{R})$$