TESTE DE AVALIAÇÃO DE MATEMÁTICA – 12.º ANO
PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

1. A soma de todos os termos da linha de ordem n do triângulo de Pascal é 2^n; assim, para esta linha, tem-se $2^n = 4096$, ou seja $n = \log_2 4096 = \log_2\left(2^{12}\right) = 12$. O elemento maior dessa linha, que tem 13 elementos, é o elemento central, ou seja, ${}^{12}C_6$ (924).

Opção correta: (D)

2.1 As diagonais do tabuleiro têm 15 casas. Os bispos, as rainhas e os reis são 8 das peças do jogo. Os dois bispos de cada cor não se distinguem um do outro, enquanto as restantes quatro peças (reis e rainhas) são distinguíveis umas das outras, assim como dos bispos.

Comecemos por escolher as casas para colocar os bispos pretos, o que podemos fazer de ${}^{15}C_2$ maneiras. Passando à escolha das casas para os bispos brancos, temos ${}^{13}C_2$ maneiras de o fazer. As restantes 4 peças podem ser dispostas nas 11 casas sobrantes, considerando a ordem da sua escolha, o que pode ser feito de ${}^{11}A_4$ maneiras. Concluindo, podemos obter $64\,864\,800$ $\left({}^{15}C_2 \times {}^{13}C_2 \times {}^{11}A_4\right)$ disposições diferentes dessas peças, colocando-as nas diagonais do tabuleiro.

2.2 Comecemos por determinar o número de disposições possíveis dos peões (16 peças), sem restrições: ${}^{64}C_{16}$ (número de casos possíveis).

O número de disposições em que todos os peões brancos ficam em casas brancas e em que todos os peões pretos ficam em casas pretas é ${}^{32}C_8 \times {}^{32}C_8$ (número de casos favoráveis).

A probabilidade de todos os peões brancos ficarem em casas brancas e de todos os peões pretos ficarem em casas pretas é igual a $\dfrac{{}^{32}C_8 \times {}^{32}C_8}{{}^{64}C_{16}}$, que é aproximadamente igual a $0,23$.

3.1

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{e^{x-2}-1}{x-2} \underset{\substack{y=x-2\\ x\to 2^-\\ y\to 0^-}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{y\to 0^-} \frac{e^y-1}{y} = 1$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{\sin(x-2)}{x^2-5x+6} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 2^+} \frac{\sin(x-2)}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x\to 2^+} \frac{\sin(x-2)}{x-2} \times \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-3} =$$

$$\underset{\substack{y=x-2\\ x\to 2^+\\ y\to 0^+}}{=} \lim_{y\to 0^+} \frac{\sin y}{y} \times \frac{1}{-1} = 1\times(-1) = -1$$

Como não se verifica $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$, a função f não tem limite em $x=2$ e, portanto, não é contínua nesse ponto.

3.2 A função f é contínua no intervalo $[-1,0]$, pois é o quociente de funções contínuas nesse intervalo.

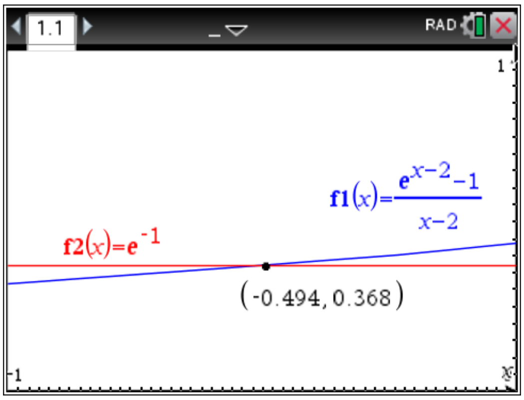
$e^{-1} \approx 0{,}3679$
$f(-1) \approx 0{,}3167$
$f(0) \approx 0{,}4323$

Verifica-se que $f(-1) < e^{-1}$ e $f(0) > e^{-1}$.

Conclui-se que, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, a equação $f(x) = e^{-1}$ tem pelo menos uma solução no intervalo $]-1,0[$.

Como a função f é crescente em $[-1,0]$, conclui-se que a equação $f(x) = e^{-1}$ tem exatamente uma solução no intervalo $]-1,0[$.

3.3 Tendo em conta o resultado fornecido pela calculadora, o valor da abcissa do ponto de interseção do gráfico de f com a reta de equação $y = e^{-1}$, no intervalo $]-1,0[$, é aproximadamente $-0{,}5$.



Trata-se de um valor aproximado às décimas da solução da equação $f(x) = e^{-1}$, no intervalo $]-1,0[$, pois verifica-se que $f(-0{,}55) < e^{-1}$ e $f(-0{,}45) > e^{-1}$ e, de acordo com a alínea anterior, sabemos que existe uma única solução da equação $f(x) = e^{-1}$ nesse intervalo.

4. Para determinar analiticamente os valores de a e b, usaremos os seguintes dados:

$T(0)=85$ e $\lim\limits_{t\to+\infty} T(t)=25$. Assim, tem-se:

$\lim\limits_{t\to+\infty} T(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\left(ae^{-0,15t}+b\right)=a\times 0+b=b$; portanto, $b=25$.

$T(0)=ae^{-0,15\times 0}+b=a+b$; $a+25=85 \Leftrightarrow a=60$

Agora, podemos equacionar o problema e obter a respetiva solução.

$$T(t)=45 \Leftrightarrow 60e^{-0,15t}+25=45 \Leftrightarrow 60e^{-0,15t}=20 \Leftrightarrow e^{-0,15t}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow -0,15t=\ln\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t=\frac{-\ln 3}{-0,15} \Leftrightarrow t=\frac{\ln 3}{0,15}\approx 7,324\ldots$$

$0,324\ldots\times 60\approx 19$

A temperatura do café foi igual a $45\,°\mathrm{C}$ cerca de 7 minutos e 19 segundos depois de ter sido tirado.

5. $z=|z|e^{i\frac{3\pi}{4}}$

$$\frac{\overline{z}}{z}=\frac{|z|e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}}{|z|e^{i\frac{3\pi}{4}}}=e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}-\frac{3\pi}{4}\right)}=e^{i\left(-\frac{6\pi}{4}\right)}=e^{i\left(-\frac{3\pi}{2}\right)}=e^{i\frac{\pi}{2}}$$

O afixo do número complexo $\frac{\overline{z}}{z}$ está contido no semieixo imaginário positivo. Assim, dos pontos dados, o afixo deste complexo pode ser o Z_2.

Opção correta: (B)

6. $$w=\frac{4}{\sqrt{3}+i}+2i^{15}=\frac{4\left(\sqrt{3}-i\right)}{\left(\sqrt{3}+i\right)\left(\sqrt{3}-i\right)}+2i^{15-12}=\frac{4\left(\sqrt{3}-i\right)}{\left(\sqrt{3}\right)^2-i^2}+2i^3=\frac{4\left(\sqrt{3}-i\right)}{3-(-1)}+2\times(-i)=$$

$$=\frac{4\left(\sqrt{3}-i\right)}{4}-2i=\sqrt{3}-i-2i=\sqrt{3}-3i$$

$|w| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-3)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

Sendo θ um argumento de w, tem-se $\tan\theta = \frac{-3}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$. Como o afixo de w pertence ao 4.º quadrante, pode ter-se $\theta = -\frac{\pi}{3}$.

$w = 2\sqrt{3}e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$

$w^6 = \left(2\sqrt{3}e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}\right)^6 = \left(2\sqrt{3}\right)^6 e^{i6\times\left(-\frac{\pi}{3}\right)} = \left(2\sqrt{3}\right)^6 e^{i(-2\pi)} = \left(2\sqrt{3}\right)^6$

$\left(2\sqrt{3}\right)^6 \in \mathbb{R}$

7.1 A área do triângulo $[ABC]$ é dada por $\frac{\overline{AC}\times y_B}{2}$, sendo y_B a ordenada do ponto B.

Determinemos as coordenadas do ponto C:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - \log_2 x = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow \log_2 x = 2 \wedge x > 0 \Leftrightarrow x = 2^2 \wedge x > 0 \Leftrightarrow x = 4$

Assim, tem-se $C(4,0)$.

Determinemos as coordenadas do ponto B:

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2 - \log_2 x = \log_2(x+3) \wedge x > 0 \wedge x > -3 \Leftrightarrow 2 = \log_2(x+3) + \log_2 x \wedge x > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2 = \log_2(x(x+3)) \wedge x > 0 \Leftrightarrow 4 = x(x+3) \wedge x > 0 \Leftrightarrow x = 1$

Cálculos auxiliares:

$4 = x(x+3) \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4\times 1\times(-4)}}{2\times 1} \Leftrightarrow x = -4 \vee x = 1$

Assim, tem-se $B(1, g(1)) = B(1,2)$.

Portanto, a área do triângulo $[ABC]$ é igual a $\frac{4\times 2}{2} = 4$.

Opção correta: (C)

7.2 $f\left(x\right)=y \Leftrightarrow 2-\log_2 x=y \Leftrightarrow \log_2 x=2-y \Leftrightarrow x=2^{2-y}$

$f^{-1}\left(x\right)=2^{2-x}$

Opção correta: (A)

8. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f\left(x\right)-9\ln x}{9x}=\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f\left(x\right)}{9x}-\dfrac{9\ln x}{9x}\right)=\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f\left(x\right)}{9x}-\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{9}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f\left(x\right)}{x}-0=\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f\left(x\right)}{x}=3$

Das equações dadas, a equação que pode definir a assíntota oblíqua ao gráfico da função f é $y=3x+1$.

Opção correta: (B)

9. Começando pela expressão da opção (C), tem-se:

$\forall n\in\mathbb{N},\ \dfrac{-1-n^2}{n^2+1}\le\dfrac{\cos\left(\pi n\right)-n^2}{n^2+1}\le\dfrac{1-n^2}{n^2+1}$

$\lim\dfrac{-1-n^2}{n^2+1}=\lim\dfrac{-n^2}{n^2}=-1$

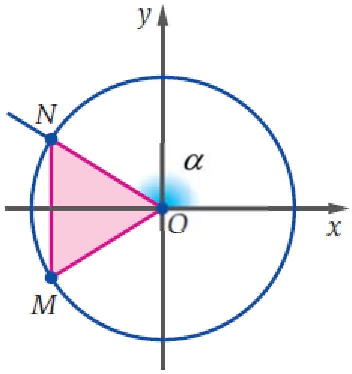
$\lim\dfrac{1-n^2}{n^2+1}=\lim\dfrac{-n^2}{n^2}=-1$

Pelo teorema das sucessões enquadradas, conclui-se que $\lim\dfrac{\cos\left(\pi n\right)-n^2}{n^2+1}=-1$

As sucessões definidas pelas expressões (A) $\dfrac{1-\cos\left(\pi n\right)n^2}{n^2+1}$ e (D) $\dfrac{1-\left(-1\right)^n n^2}{n^2+1}$ não são convergentes. A sucessão definida pela expressão (B) $\dfrac{n^2-\left(-1\right)^n}{n^2+1}$ converge para 1 (conclusão a que se pode chegar pelo teorema das sucessões enquadradas).

Opção correta: (C)

10.1 O raio da circunferência é $\sqrt{3}$.



Tem-se:

$N\left(\sqrt{3}\cos\alpha,\ \sqrt{3}\sin\alpha\right)$

$M\left(\sqrt{3}\cos(-\alpha),\ \sqrt{3}\sin(-\alpha)\right) = M\left(\sqrt{3}\cos\alpha,\ -\sqrt{3}\sin\alpha\right)$

$\overline{MN} = 2\sqrt{3}\sin\alpha$

A altura do triângulo é dada por $-\sqrt{3}\cos\alpha$ (tem-se $\cos\alpha < 0$).

$$\text{Área} = \frac{2\sqrt{3}\sin\alpha \times \left(-\sqrt{3}\cos\alpha\right)}{2} = -\frac{3\times 2\sin\alpha\cos\alpha}{2} = -\frac{3\sin(2\alpha)}{2} = -\frac{3}{2}\sin(2\alpha)$$

10.2

<u>1.º processo:</u>

$$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Leftrightarrow \pi < 2\alpha < 2\pi \Rightarrow -1 \le \sin(2\alpha) < 0$$

Portanto, $-\frac{3}{2}\sin(2\alpha)$ é máximo quando $\sin(2\alpha) = -1$, isto é, quando $2\alpha = \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{3\pi}{4}$.

Sendo $\alpha = \frac{3\pi}{4}$, o triângulo $[MNO]$ é retângulo e isósceles.

<u>2.º processo:</u>

$$A'(\alpha) = \left(-\frac{3}{2}\sin(2\alpha)\right)' = -\frac{3}{2}\cos(2\alpha)\times(2\alpha)' = -\frac{3}{2}\cos(2\alpha)\times 2 = -3\cos(2\alpha)$$

$$A'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow -3\cos(2\alpha) = 0 \Leftrightarrow \cos(2\alpha) = 0 \Leftrightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$$

Sendo $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, tem-se $A'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{3\pi}{4}$.

$$A''(\alpha) = \left(-3\cos(2\alpha)\right)' = 6\sin(2\alpha)$$

$$A''\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 6\sin\left(2\times\frac{3\pi}{4}\right) = 6\sin\frac{3\pi}{2} = -6 < 0$$

Como $A'\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 0$ e $A''\left(\frac{3\pi}{4}\right) < 0$, a área do triângulo $[MNO]$ é máxima para $\alpha = \frac{3\pi}{4}$.

Sendo $\alpha = \frac{3\pi}{4}$, o triângulo $[MNO]$ é retângulo e isósceles.

10.3 $\overrightarrow{ON}\left(\sqrt{3}\cos\frac{5\pi}{6},\ \sqrt{3}\sin\frac{5\pi}{6}\right)=\overrightarrow{ON}\left(\sqrt{3}\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ \sqrt{3}\times\frac{1}{2}\right)=\overrightarrow{ON}\left(-\frac{3}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\overrightarrow{OM}\left(\sqrt{3}\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right),\ \sqrt{3}\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)=\overrightarrow{ON}\left(\sqrt{3}\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ \sqrt{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)\right)=\overrightarrow{ON}\left(-\frac{3}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\overrightarrow{ON}\cdot\overrightarrow{OM}=\left(-\frac{3}{2}\right)\times\left(-\frac{3}{2}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{9}{4}-\frac{3}{4}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$

Opção correta: (A)

11.1 $T=\frac{2\pi}{\frac{2\pi}{3}}=3\,\text{s}$; $f=\frac{1}{T}=\frac{1}{3}\text{Hz}$

Opção correta: (D)

11.2 A velocidade do corpo *C* é dada, em função de t, por $d'(t)$.

$d'(t)=\left(7+6\cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right)\right)'=-6\sin\left(\frac{2\pi}{3}t\right)\times\left(\frac{2\pi}{3}t\right)'=-6\sin\left(\frac{2\pi}{3}t\right)\times\frac{2\pi}{3}=-4\pi\sin\left(\frac{2\pi}{3}t\right)$

Determinemos o primeiro instante, em que d' atinge o valor máximo (que sabemos ser único, dado tratar-se de um oscilador harmónico).

$d''(t)=0\Leftrightarrow-\frac{8\pi^2}{3}\cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right)=0\Leftrightarrow\cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right)=0\Leftrightarrow\frac{2\pi}{3}t=\frac{\pi}{2}+k\pi\wedge k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow t=\frac{3}{4}+\frac{3}{2}k\wedge k\in\mathbb{Z}$

Sendo $0\le t\le 30$, tem-se:

$t=\frac{3}{4}+\frac{3}{2}k\wedge k\in\{0,1,\ldots,19\}$

Quadro de sinal de d'' e de monotonia de d':

t	0		$\frac{3}{4}$		$\frac{9}{4}$	
$d''(t)$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$
d'		↘	Mínimo	↗	Máximo	↘

Por análise do quadro, podemos concluir que a velocidade foi máxima pela primeira vez quando $t=\frac{9}{4}$ s.

12.1 $\left\|\overrightarrow{CD}\right\|=\sqrt{0^2+(-2)^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

$AD:\ (x,y,z)=(0,0,2)+k(1,0,0),\ k\in\mathbb{R}$

Com $k=2\sqrt{2}$, obtêm-se as coordenadas do ponto A: $\left(2\sqrt{2},0,2\right)$

$BC:\ (x,y,z)=(0,2,0)+k(1,0,0),\ k\in\mathbb{R}$

Com $k=2\sqrt{2}$, obtêm-se as coordenadas do ponto B: $\left(2\sqrt{2},2,0\right)$

12.2 A altura da pirâmide é igual a $\dfrac{3\times 8\sqrt{2}}{\left(2\sqrt{2}\right)^2}=3\sqrt{2}$.

Sendo E o centro da base da pirâmide, tem-se:
$\left\|\overrightarrow{EV}\right\|=3\sqrt{2}$ e $E\left(\sqrt{2},1,1\right)$ (ponto médio de $[AC]$ ou de $[BD]$).

Por outro lado, sendo $\overrightarrow{EV}(a,b,c)$, tem-se:

$$\begin{cases}\overrightarrow{EV}\cdot\overrightarrow{AD}=0\\ \overrightarrow{EV}\cdot\overrightarrow{CD}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a,b,c)\cdot\left(-2\sqrt{2},0,0\right)=0\\ (a,b,c)\cdot(0,-2,2)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\ -2b+2c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\ b=c\end{cases}$$

As coordenadas de $\overrightarrow{EV}$ são da forma $(0,c,c)$, com $c\neq 0$.

$$\left\|\overrightarrow{EV}\right\|=\sqrt{0^2+c^2+c^2}\Leftrightarrow\sqrt{0^2+c^2+c^2}=3\sqrt{2}\Leftrightarrow\sqrt{2c^2}=3\sqrt{2}\underset{2c^2>0}{\Leftrightarrow}2c^2=18\Leftrightarrow c=\pm 3$$

Considerando V no 1.º octante, tem-se $\overrightarrow{EV}(0,3,3)$.

Como $V=E+\overrightarrow{EV}$, as coordenadas de V são:
$\left(\sqrt{2}+0,\ 1+3,\ 1+3\right)=\left(\sqrt{2},3,3\right)$

13. A área do triângulo $[PQR]$ é dada por $\dfrac{\overline{PQ}\times\overline{QR}}{2}$.

O ponto P tem coordenadas $(a,\ f(a))$, ou seja, $(a,\ln a)$.

O ponto Q tem coordenadas $(0,\ln a)$.

Determinemos a equação reduzida da reta t.

$f'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}$

O declive da reta t é $f'(a) = \frac{1}{a}$.

$\ln a = \frac{1}{a} \times a + b \Leftrightarrow b = \ln a - 1$

A equação reduzida da reta t é $y = \frac{1}{a}x + \ln a - 1$.

Portanto, o ponto R tem coordenadas $(0, \ln a - 1)$.

Tem-se, então:

$\overline{PQ} = a$;

$\overline{QR} = \ln a - (\ln a - 1) = 1$;

Conclusão: $\text{Área}_{[PQR]} = \frac{a \times 1}{2} = \frac{a}{2}$