TESTE DE AVALIAÇÃO GLOBAL – MATEMÁTICA A

12.º ANO

- O teste é constituído por **dois grupos** (I e II).
- Utiliza apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.
- **Só é permitido o uso de calculadora no Grupo I**.
- Para cada resposta, identifica o item. Apresenta as tuas respostas de forma legível. Apresenta apenas uma resposta para cada item. Risca o que pretendes que não seja classificado.
- O teste inclui um **formulário**.
- As **cotações** dos itens encontram-se no final de cada grupo do teste.
- Na resposta aos **itens de escolha múltipla**, escreve apenas na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.
- Na resposta aos restantes itens, apresenta todas as justificações e cálculos necessários.

GRUPO I

Duração: 50 minutos

1. A soma de todos os termos de uma linha do triângulo de Pascal é 4096.

Qual é o maior elemento dessa linha?

(A) 495 **(B)** 624 **(C)** 792 **(D)** 924

2. No Xadrez, o tabuleiro é constituído por 64 casas, 32 brancas e 32 pretas, como se ilustra na figura ao lado. Cada conjunto de peças, brancas ou pretas, é constituído por 2 torres, 2 cavalos, 2 bispos, 1 rei, 1 rainha e 8 peões.

2.1 Supõe que, num tabuleiro vazio, se dispõem, aleatoriamente, os bispos, as rainhas e os reis, brancos e pretos, um por casa.

Quantas disposições diferentes dessas peças podemos obter, se só as pudermos colocar nas diagonais do tabuleiro?

2.2 Supõe, agora, que dispomos aleatoriamente, no tabuleiro vazio, apenas os peões de ambos os conjuntos de peças, brancas e pretas.

Determina a probabilidade de todos os peões brancos ficarem em casas brancas e de todos os peões pretos ficarem em casas pretas.

Apresenta o resultado na forma de dízima, arredondado às centésimas.

3. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{x-2}-1}{x-2} & \text{se } x<2\\ 1 & \text{se } x=2\\ \dfrac{\sin(x-2)}{x^2-5x+6} & \text{se } x>2\end{cases}$$

3.1 Estuda a função f quanto à continuidade em $x=2$.

3.2 Sabe-se que a função f é crescente em $[-1,0]$.

Mostra que a equação $f(x)=e^{-1}$ tem exatamente uma solução no intervalo $]-1,0[$.

3.3 Utilizando a calculadora gráfica, determina um valor aproximado às décimas da solução da equação $f(x)=e^{-1}$, no intervalo $]-1,0[$.

Na tua resposta reproduz, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que te permite(m) resolver a equação. Justifica que o valor obtido se trata de um valor aproximado às décimas da solução da equação.

4. Numa pastelaria, um café acabado de tirar foi colocado na mesa de um cliente.

A temperatura T do café, em $°\mathrm{C}$, é dada, t minutos após o café ter sido tirado, pela expressão

$$T(t)=ae^{-0,15t}+b, \quad \text{com } a\neq 0 \text{ e } b\in\mathbb{R}$$

Sabe-se que a temperatura do café quando foi tirado era $85\,°\mathrm{C}$ e que a temperatura ambiente da pastelaria, considerada constante, era $20\,°\mathrm{C}$.

Determina quanto tempo depois de o café ter sido tirado a sua temperatura foi igual a $45\,°\mathrm{C}$.

Apresenta o resultado em minutos e segundos, com arredondamento às unidades de segundo.

Na tua resposta:

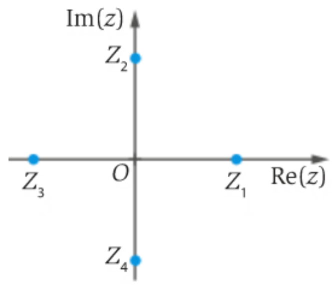
– determina analiticamente os valores de a e b;
– equaciona o problema;
– resolve analiticamente a equação;
– obtém a aproximação pedida.

Grupo I							
Item	**1.**	**2.1**	**2.2**	**3.1**	**3.2**	**3.3**	**4.**
Cotação	5	10	12	14	10	14	14

GRUPO II
Duração: 100 minutos

5. Seja z um número complexo não nulo, tal que $Arg(z) = \frac{3\pi}{4}$.

Qual dos pontos do plano complexo, contidos nos eixos, assinalados na figura ao lado, pode ser o afixo do número complexo $\frac{\overline{z}}{z}$?



(A) Z_1 **(B)** Z_2 **(C)** Z_3 **(D)** Z_4

6. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, seja $w \in \mathbb{C}$, tal que:

$$w = \frac{4}{\sqrt{3}+i} + 2i^{15}$$

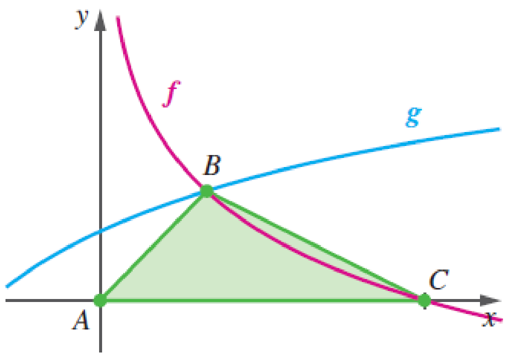
Mostra que w^6 é um número real.

Na tua resposta, começa por obter w na forma trigonométrica.

7. Considera funções f e g tais que $f(x) = 2 - \log_2 x$ e $g(x) = \log_2(x+3)$.

Na figura, estão representados parcialmente, em referencial ortonormado, os gráficos das funções f e g, e o triângulo $[ABC]$ tal que:

- o vértice A coincide com a origem do referencial;
- o vértice B é o ponto de interseção dos gráficos das funções f e g;
- o vértice C é o ponto de interseção do gráfico de f com o eixo das abcissas.



7.1 A área do triângulo $[ABC]$ é:

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 4 **(D)** 8

7.2 Qual das seguintes expressões analíticas pode definir a função f^{-1}, inversa de f ?

(A) $f^{-1}(x)=2^{2-x}$ **(B)** $f^{-1}(x)=2^{x-2}$

(C) $f^{-1}(x)=2-2^{x}$ **(D)** $f^{-1}(x)=2^{x}-2$

8. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}^+$.

Sabe-se que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)-9\ln x}{9x}=\dfrac{1}{3}$ e que o gráfico da função f tem uma assíntota oblíqua.

Qual das equações seguintes pode definir essa assíntota?

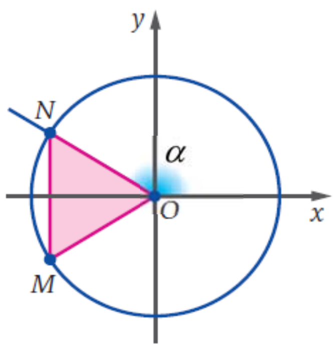
(A) $y=\frac{1}{3}x+1$ **(B)** $y=3x+1$ **(C)** $y=x+\frac{1}{3}$ **(D)** $y=x+3$

9. Qual dos seguintes é o termo geral de uma sucessão convergente para -1?

(A) $\dfrac{1-\cos(\pi n)n^2}{n^2+1}$ **(B)** $\dfrac{n^2-(-1)^n}{n^2+1}$

(C) $\dfrac{\cos(\pi n)-n^2}{n^2+1}$ **(D)** $\dfrac{1-(-1)^n n^2}{n^2+1}$

10. Na figura ao lado, está representada, em referencial ortonormado do plano, a circunferência de equação $x^2+y^2=3$. O ponto N pertence à circunferência e ao 2.° quadrante.



Seja α a amplitude do ângulo que a semirreta $\dot{O}N$ faz com o semieixo positivo das abcissas, com $\alpha\in\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$.

Os pontos M e N são simétricos em relação a Ox.

10.1 Mostra que a área do triângulo $[MNO]$ é dada, em função de α, por:

$$A(\alpha)=-\frac{3}{2}\sin(2\alpha)$$

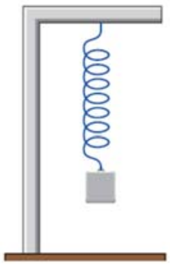
10.2 Determina para que valor de α a área do triângulo $[MNO]$ é máxima.

Interpreta geometricamente a situação, classificando o triângulo nas condições referidas quanto aos ângulos e quanto aos lados.

10.3 Supõe que $\alpha = \frac{5\pi}{6}$. Qual é o valor do produto escalar $\overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{OM}$?

(A) $\frac{3}{2}$ **(B)** $\frac{9}{2}$ **(C)** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ **(D)** $\frac{9\sqrt{3}}{2}$

11. Uma mola está suspensa por uma extremidade, tendo na outra extremidade um corpo *C* .



Após ter sido alongada na vertical, a mola inicia um movimento oscilatório no instante $t = 0$.

A distância do corpo *C* ao solo (em centímetros) é dada, em cada instante t (em segundos), pela expressão:

$$d(t) = 7 + 6\cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right),\ t \in [0,30] .$$

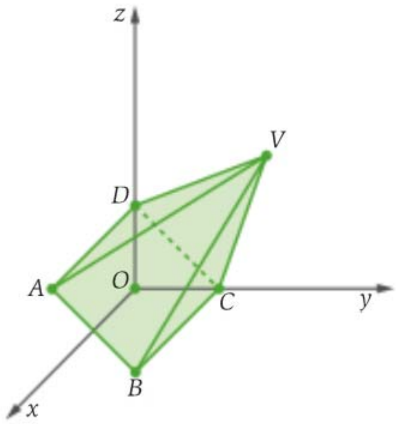
11.1 Quais são os valores do período, T , em segundos, e da frequência, f , em hertz, de oscilação do corpo *C*?

(A) $T = \frac{2\pi}{3}$ e $f = 7$ **(B)** $T = 6$ e $f = \frac{1}{6}$

(C) $T = \frac{1}{3}$ e $f = 3$ **(D)** $T = 3$ e $f = \frac{1}{3}$

11.2 Determina o primeiro instante em que a velocidade do corpo *C* é máxima.

12. Na figura ao lado, está representada, em referencial o.n. $Oxyz$, uma pirâmide quadrangular regular de base $[ABCD]$ e vértice V, contido no 1.º octante.



Sabe-se que:

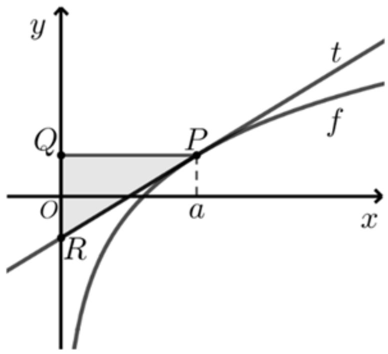
- $C(0,2,0)$ e $D(0,0,2)$;
- a reta BC é paralela ao eixo Ox.

12.1 Determina as coordenadas dos pontos A e B.

12.2 Determina as coordenadas do vértice V, sabendo que o volume da pirâmide é $8\sqrt{2}$.

13. Na figura seguinte, estão representados, em referencial ortonormado do plano:

- parte do gráfico da função f, real de variável real, definida por $f(x) = \ln x$;
- a reta t, tangente ao gráfico de f no ponto P, de abcissa a, com $a > 0$;
- o triângulo $[PQR]$, sendo a reta PQ paralela ao eixo Ox e o vértice R o ponto de interseção da reta t com o eixo das ordenadas.



Mostra que a área do triângulo $[PQR]$ é igual a $\frac{a}{2}$, qualquer que seja $a > 0$.

FIM

Grupo II													
Item	**5.**	**6.**	**7.1**	**7.2**	**8.**	**9.**	**10.1**	**10.2**	**10.3**	**11.1**	**11.2**	**12.1**	**12.2**	**13.**
Cotação	5	14	5	5	5	5	10	14	5	5	14	10	10	14

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$ ou $(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ ou $\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$

($k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$)

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

Fonte: http://provas.iave.pt/np4/file/292/IP_MatA_635_2018_outubro_2017.pdf