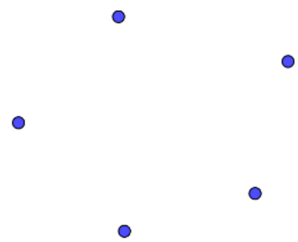
# BANCO DE QUESTÕES – MATEMÁTICA A 12.º ANO

## DOMÍNIO: Cálculo combinatório e probabilidades

**1.** Com os algarismos $1$, $2$, $3$, $4$ e $5$, quantos números ímpares superiores a $40\,000$, com algarismos distintos, se podem formar?

**(A)** $12$ **(B)** $24$ **(C)** $30$ **(D)** $36$

**2.** Considera, no plano, os cinco pontos representados na figura ao lado. Quantos polígonos se podem formar com vértices em pontos da figura?



**(A)** $5!\times 4!\times 3!$ **(C)** ${}^5C_3 + {}^5C_4 + 1$

**(B)** ${}^5A_3 + {}^5A_4 + 1$ **(D)** ${}^5C_3 \times {}^5C_4 \times 1$

**3.** O 10.º e o 11.º elementos de uma linha do Triângulo de Pascal são iguais.

Qual é o 3.º elemento dessa linha?

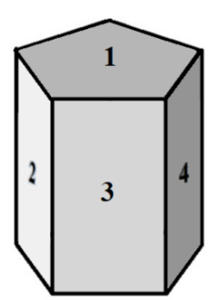
**(A)** ${}^{19}C_2$ **(B)** ${}^{19}C_3$ **(C)** ${}^{20}C_2$ **(D)** ${}^{20}C_3$

**4.** Determina, utilizando o Binómio de Newton, o termo do 2.º grau que resulta do desenvolvimento de $\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}\right)^{13}$.

**5.** Dispõe-se de 8 cores para pintar um prisma pentagonal, com as faces numeradas, de forma que as bases se pintem da mesma cor e que faces com arestas comuns não tenham a mesma cor.

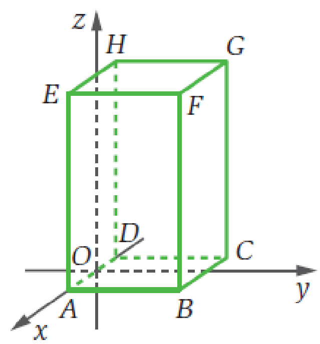
De quantas maneiras diferentes é possível fazê-lo?

Apresenta todos os cálculos ou justificações necessárias.




Carlos Andrade, Pedro Pimenta e Simone Azevedo

**6.** No referencial o.n. do espaço da figura ao lado, está representado o prisma reto $[ABCDEFGH]$, de bases quadradas paralelas ao plano $xOy$. Escolhem-se, aleatoriamente, três vértices do prisma.




**6.1** Sabe-se que os vértices escolhidos não pertencem a uma mesma face.

Qual é a probabilidade de definirem um plano paralelo a um dos planos coordenados?

**(A)** $0$

**(B)** $\frac{1}{6}$

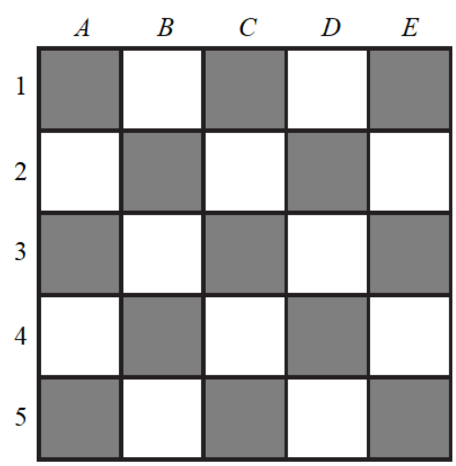
**(C)** $\frac{1}{3}$

**(D)** $1$

**6.2** Determina a probabilidade de os três vértices escolhidos definirem um plano paralelo ao plano de equação $z=-2$.

Apresenta o valor pedido na forma de fração irredutível.

**7.** Na figura ao lado, está representado um tabuleiro com $25$ casas, alternadamente pretas e brancas, dispostas em cinco filas horizontais ($1$, $2$, $3$, $4$ e $5$) e em cinco filas verticais ($A$, $B$, $C$, $D$ e $E$).




Cinco peças distintas vão ser colocadas, ao acaso, no tabuleiro, de modo que cada peça ocupe uma única casa e que cada casa não contenha mais do que uma peça.

Determina a probabilidade de as cinco peças ficarem todas em casas brancas do tabuleiro.

Apresenta o valor pedido em percentagem arredondada às décimas.

**8.** Seja $\Omega$ um conjunto finito, espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória, e sejam $A$ e $B$ dois acontecimentos equiprováveis desse espaço tais que:

- $P(A \cap B) = 0,2$;
- $P(A \cup B) = 0,4$.

Determina $P(A|B)$.

Apresenta o valor pedido na forma de fração irredutível.

**9.** Um saco contém $10$ bolas indistinguíveis ao tato, numeradas de $1$ a $10$.

Retira-se, ao acaso, uma bola do saco.

Sejam $A$ e $B$ os acontecimentos seguintes:

$A$: «o número da bola retirada é menor ou igual a $7$»

$B$: «o número da bola retirada é ímpar»

Escreve o significado de cada uma das seguintes expressões no contexto da situação descrita e determina o respetivo valor.

Apresenta os valores pedidos na forma de fração.

**9.1** $P\left(\overline{A}\cap B\right)$

**9.2** $P\left(\overline{B}\,|\,A\right)$

**10.** Seja $\Omega$ um conjunto finito, espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória, e sejam $A$ e $B$ dois acontecimentos possíveis desse espaço.

**10.1** Mostra que $P\left(A\cap\overline{B}\right)=P(A)-P(B)+P\left(\overline{A}\,|\,B\right)\times P(B)$.

**10.2** Dos cães de um certo canil, sabe-se que:

- um terço não foi recolhido na rua;
- um quarto é rafeiro;
- dos que são rafeiros, um quinto não foi recolhido na rua.

Escolhendo, aleatoriamente, um cão deste canil, qual é a probabilidade de este ter sido recolhido na rua e não ser rafeiro?

Apresenta o valor pedido na forma de fração.

Na tua resposta, podes usar a igualdade apresentada na alínea anterior.

## **DOMÍNIO:** Funções reais de variável real

**1.** Seja $g$ a função definida, em $\mathbb{R}$, para cada valor de $k \geq -1$, por:

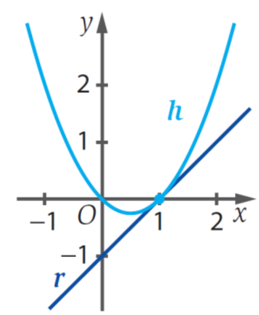
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x^2}{x^2+3x+2} & \text{se } x > -1 \\ \sqrt{k-x} & \text{se } x \leq -1 \end{cases}$$

Qual é o valor de $k$ para o qual $f$ é contínua em $x = -1$?

**(A)** 0 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 8

**2.** No referencial o.n. da figura, estão representados parte do gráfico da função $h$ e a reta $r$, tangente ao gráfico de $h$ no ponto de abcissa $1$.

A reta $r$ interseta o eixo $Ox$ no ponto de abcissa 1 e o eixo $Oy$ no ponto de ordenada $-1$.




**2.1** O valor de $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{h(x)-h(1)}{x-1}$ é:

**(A)** $-1$ **(B)** 0 **(C)** 1 **(D)** 2

**2.2** Sabe-se que $h$ é uma função quadrática com zeros $0$ e $1$.

**2.2.1** Qual é a solução da equação $h'(x) = 0$?

**(A)** 0 **(B)** $\dfrac{1}{4}$ **(C)** $\dfrac{1}{2}$ **(D)** 1

**2.2.2** Qual das seguintes é uma expressão analítica de $h$?

**(A)** $\dfrac{1}{2}x(x+1)$ **(B)** $x(x+1)$ **(C)** $\dfrac{1}{2}x(x-1)$ **(D)** $x(x-1)$

**3.** Seja $g$ uma função, de domínio $\mathbb{R}^+$, cujo gráfico tem uma assíntota de equação $y = -1$.

Qual das seguintes expressões pode definir a função derivada de $g$?

**(A)** $g'(x) = \dfrac{1-x}{x+1}$ **(C)** $g'(x) = 1-x$

**(B)** $g'(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2}$ **(D)** $g'(x) = (1+x)^2$

**4.** Determina o conjunto de pontos de continuidade de cada uma das seguintes funções reais de variável real.

**4.1** $f\left(x\right)=\dfrac{x-3}{\sqrt{3-x^2}}$

**4.2** $g\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{3x+3}{\sqrt{x^2-1}} & \text{se } x<-1 \vee x>1 \\ 3x+3 & \text{se } -1\leq x\leq 1\end{cases}$

**5.** Estuda as seguinte funções quanto à existência de assíntotas ao seu gráfico. Caso existam, escreve as respetivas equações.

**5.1** $f\left(x\right)=\dfrac{2x^3-10x}{x^2+3}$

**5.2** $g\left(x\right)=\dfrac{3x^2-1}{2-x}$

**6.** Seja $g$ a função, real de variável real, definida por $g\left(x\right)=-x^4+18x^2+19$.

Determina os intervalos de monotonia da função $g$ e identifica os respetivos extremos relativos e absolutos, caso existam.

**7.** Seja $g$ a função real de variável real definida por $f\left(x\right)=\dfrac{2x^3-10x}{x^2+3}$.

Determina os intervalos de monotonia da função $f$ e identifica os respetivos extremos relativos e absolutos, caso existam.

**8.** Sejam $f$ e $g$ funções, de domínio $\mathbb{R}$, tais que:

- $f$ é par;
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f\left(x\right)}{x}=-2$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f\left(x\right)-2x\right)=1$;
- $g\left(x\right)=2\,f\left(x\right)$.

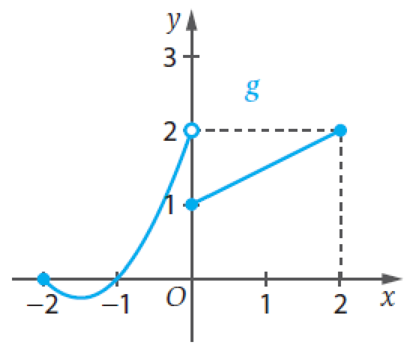
Verifica que o gráfico de $g$ tem uma assíntota oblíqua em $-\infty$ e indica a respetiva equação reduzida.

**9.** Um pintor pretende utilizar uma tela retangular para fazer uma pintura, de forma também retangular, com $2400\ \text{cm}^2$ de área, com margens brancas em toda à volta. A largura das margens superior e inferior deverá ser $3\ \text{cm}$ e a das margens laterais deverá ser $2\ \text{cm}$.

Determina a área mínima da tela a utilizar pelo pintor.

Apresenta o valor pedido em $\text{cm}^2$.

**10.** Seja $g$ a função, de domínio $[-2, 2]$, representada graficamente na figura ao lado, e seja $(u_n)$ a sucessão definida por $-\frac{1}{n}$.




Qual é o valor de $\lim g(u_n)$ ?

**(A)** $-1$ **(B)** $0$ **(C)** $1$ **(D)** $2$

**11.** Calcula $\lim\limits_{x \to -\infty} \left( \left( \sqrt{x^2 - 1} + x \right) \times \sin(\pi x) \right)$.

Na tua resposta, utiliza o teorema das funções enquadradas.

**12.** Seja $s$ a reta de equação $(x, y) = (1, 2) + k(-2, 1),\ k \in \mathbb{R}$, em referencial o.n. $Oxy$.

Sabe-se que a reta $s$ é tangente ao gráfico de uma função, $f$, no ponto de abcissa $3$.

**12.1** Qual é o valor de $f'(3)$?

**(A)** $-2$ **(B)** $-\frac{1}{2}$ **(C)** $\frac{1}{2}$ **(D)** $2$

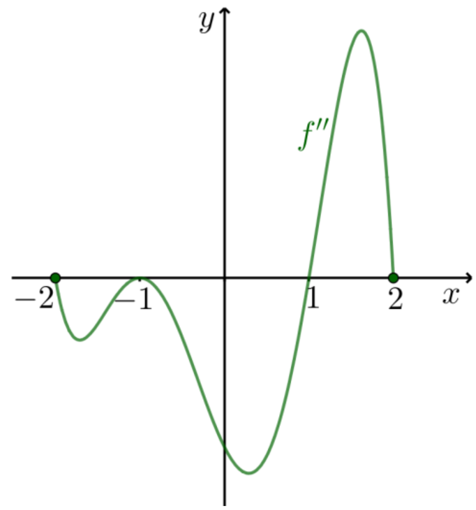
**12.2** Qual é o valor de $f(3)$?

**(A)** $-1$ **(B)** $1$ **(C)** $2$ **(D)** $3$

**13.** Na figura seguinte, está representada graficamente $f''$, a segunda derivada de uma função $f$, de domínio $[-2, 2]$.

Os zeros da função $f''$ são $-2$, $-1$, $1$ e $2$.

Seja $f'$ a primeira derivada de $f$.




**13.1** Qual das proposições seguintes é verdadeira?

**(A)** A função $f'$ é crescente no intervalo $]-2, -1[$.

**(B)** A função $f'$ é crescente no intervalo $]-1, 0[$.

**(C)** A função $f'$ é decrescente no intervalo $]0, 1[$.

**(D)** A função $f'$ é decrescente no intervalo $]1, 2[$.

**13.2** Qual das proposições seguintes é verdadeira?

**(A)** A concavidade do gráfico de $f$ é voltada para cima no intervalo $]-2, -1[$.

**(B)** A concavidade do gráfico de $f$ é voltada para cima no intervalo $]-1, 0[$.

**(C)** A concavidade do gráfico de $f$ é voltada para baixo no intervalo $]0, 1[$.

**(D)** A concavidade do gráfico de $f$ é voltada para baixo no intervalo $]1, 2[$.

**13.3** Quantos pontos de inflexão tem o gráfico da função $f$?

**(A)** 1 **(B)** 2 **(B)** 3 **(B)** 4

**14.** Determina uma expressão analítica da segunda derivada de cada uma das funções, reais de variável real, definidas por:

**14.1** $f(x) = \sqrt{x-1}\,(x-1)$

**14.2** $g(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x+1}$

**15.** Seja $g$ a função definida, em $\mathbb{R}_0^-$, por

$$g(x)=\frac{x^3-2x^2-11x+12}{x^2-9}$$

Estuda a função $g$ quanto à existência de assíntotas ao seu gráfico.

Na tua resposta, apresenta as equações das assíntotas, caso existam.

**16.** Considera a função $f$ definida, em $[0,+\infty[$, por $f(x)=\sqrt{x}\left(x^3-2x+1\right)$.

O gráfico da função $f$ tem exatamente um ponto de inflexão.

**16.1** Mostra, utilizando o teorema de Bolzano-Cauchy, que a abcissa desse ponto de inflexão pertence ao intervalo $]0,4;\,0,5[$.

**16.2** Determina, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, a abcissa do ponto de inflexão.

Na tua resposta:

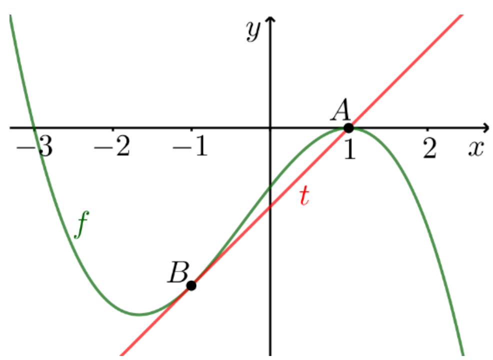
- equaciona o problema;

- reproduz, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualidado(s) na calculadora que te permite(m) resolver a equação;

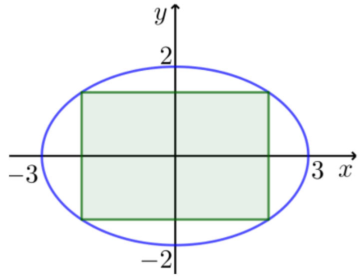
- apresenta o valor pedido arredondado às centésimas.

**17.** Na figura ao lado, estão representadas graficamente a função $f$, polinimial, definida por $f(x)=-x^3-x^2+5x-3$, e a reta $t$, tangente ao gráfico de $f$ no ponto $B$. A reta $t$ também interseta o gráfico de $f$ no ponto $A$, de abcissa 1.

Determina as coordenadas do ponto $B$.



**18.** Determina a área do retângulo de maior área inscrito na elipse de equação $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$, cujos lados são paralelos aos eixos da elipse.




## DOMÍNIO: Trigonometria e funções trigonométricas

**1.** A equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função $f$, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x)=\sin(2x)$, no ponto de abcissa $\frac{\pi}{2}$ é:

**(A)** $y=x-\frac{\pi}{2}$

**(B)** $y=-x+\frac{\pi}{2}$

**(C)** $y=2x-\pi$

**(D)** $y=-2x+\pi$

**2.** A função derivada de uma função $f$, de domínio $\mathbb{R}$, é definida por

$$f'(x)=\cos(2x)$$

**2.1** Qual das seguintes expressões pode definir a função $f$?

**(A)** $f(x)=\sin x\cos x$

**(B)** $f(x)=\sin(2x)$

**(C)** $f(x)=-\sin x\cos x$

**(D)** $f(x)=-\sin(2x)$

**2.2** Sabe-se que $f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{4}$. Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{6}}\frac{f(x)+\frac{\sqrt{3}}{4}}{x+\frac{\pi}{6}}$?

**(A)** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **(B)** $-\frac{1}{2}$ **(C)** $\frac{1}{2}$ **(D)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

**3.** Seja $h$ a função definida, no seu domínio de existência, por $h(x) = \tan\left(\frac{1}{x}\right)$.

**3.1** O domínio da função $h$ é:

**(A)** $\left\{x \in \mathbb{R} \,:\, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\, k \in \mathbb{Z}\right\}$

**(B)** $\left\{x \in \mathbb{R} \,:\, x \neq 0 \wedge x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\, k \in \mathbb{Z}\right\}$

**(C)** $\left\{x \in \mathbb{R} \,:\, x \neq \frac{2}{\pi + 2k\pi},\, k \in \mathbb{Z}\right\}$

**(D)** $\left\{x \in \mathbb{R} \,:\, x \neq 0 \wedge x \neq \frac{2}{\pi + 2k\pi},\, k \in \mathbb{Z}\right\}$

**3.2** Uma expressão analítica da função derivada de $h$ é:

**(A)** $h'(x) = -\dfrac{\tan^2\left(\frac{1}{x}\right) + 1}{x^2}$

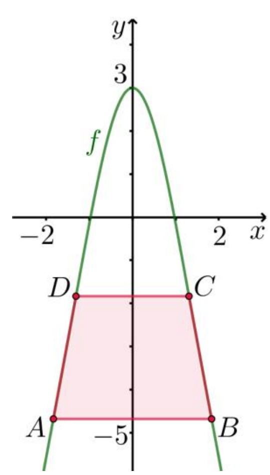
**(B)** $h'(x) = \dfrac{\tan^2\left(\frac{1}{x}\right) + 1}{x^2}$

**(C)** $h'(x) = -\dfrac{1}{\cos^2\left(\frac{1}{x}\right)}$

**(D)** $h'(x) = \dfrac{1}{\cos^2\left(\frac{1}{x}\right)}$

**4.** Na figura ao lado, estão representados, em referencial o.n. $Oxy$, parte do gráfico da função real de variável real $f$, definida por $f(x) = \cos(2x) - \sqrt{3}x^2 + 3$, e o trapézio $[ABCD]$, cujos vértices são os pontos de inflexão do gráfico de $f$, cujas abcissas pertencem ao intervalo $]-2, 2[$.

Determina a área do trapézio $[ABCD]$.



**5.** Seja $g$ a função, de domínio  , definida por:

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin(x-\pi)}{x^2+x} & \text{se } x>0 \\ -1 & \text{se } x=0 \\ \dfrac{4x^2-x}{-3x^2+x} & \text{se } x<0 \end{cases}$$

**5.1** Averigua se a função $g$ é contínua em $x=0$.

**5.2** Averigua se a função $g$ é diferenciável em $x=0$. Em caso afirmativo, indica o valor de $g'(0)$.

**5.3** Estuda a função $g$ quanto à existência de assíntotas horizontais ao seu gráfico.

**5.4** Sabe-se que função $g$ tem um máximo relativo no intevalo $[4,5]$.

Determina, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o valor desse máximo relativo.

Na tua resposta:

- determina uma expressão da função derivada da função $g$ ;

- equaciona o problema;

- reproduz, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualidado(s) na calculadora que te permite(m) resolver a equação;

- justifica que se trata de um máximo relativo;

- apresenta o valor pedido arredondado às centésimas.

## DOMÍNIO: Funções exponenciais e funções logarítmicas

**1.** Seja $k$ um número real tal que a sucessão $(u_n)$, definida por $u_n = \left(\frac{n-k}{n}\right)^n$, tem limite igual a $\sqrt{e}$.

Qual é o valor de $k$ ?

**(A)** $-2$ **(B)** $-\frac{1}{2}$ **(C)** $\frac{1}{2}$ **(D)** $2$

**2.** Foram aplicados $1800$ euros numa aplicação financeira com regime de juro composto à taxa semestral de $1\%$.

Qual das seguintes expressões dá o capital acumulado ao fim de $n$ anos?

**(A)** $1800\left(1+\frac{1}{100}\right)^n$

**(B)** $1800\left(1+\frac{2}{100}\right)^n$

**(C)** $1800\left(1+\frac{1}{100}\right)^{2n}$

**(D)** $1800\left(1+\frac{2}{100}\right)^{2n}$

**3.** Seja $a$ o número real tal que $3a = \log_7 9$.

Qual é o valor de $49^a$ ?

**(A)** $\sqrt{18}$ **(B)** $\sqrt{729}$ **(C)** $\sqrt[3]{18}$ **(D)** $\sqrt[3]{81}$

**4.** Seja $b$ um número real positivo.

Qual das seguintes expressões é equivalente a $\log_5 \frac{125}{\sqrt{b}} - \log_5(5b)$ ?

**(A)** $-\log_5 b$ **(B)** $\log_5 b$ **(C)** $2-\frac{3}{2}\log_5 b$ **(D)** $2+\frac{1}{2}\log_5 b$

**5.** Qual dos seguintes limites é finito?

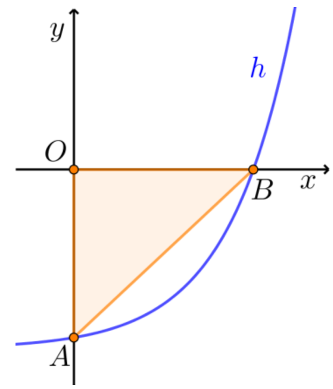
**(A)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{\pi}{e}\right)^x$ **(B)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{e}{\pi}\right)^x$ **(C)** $\lim\limits_{x\to-\infty}(\pi-e)^x$ **(D)** $\lim\limits_{x\to-\infty}(e+\pi)^{-x}$

**6.** Qual é o domínio da função real de variável real, $f$, definida por $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{x+1}\right)$ ?

**(A)** $]-\infty, -1[\cup]0,+\infty[$ **(C)** $]-\infty, 0[\cup]1,+\infty[$

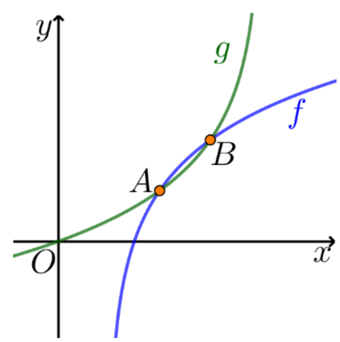
**(B)** $]-1, 0[$ **(D)** $]0, 1[$

**7.** Na figura ao lado, estão representados, em referencial o.n. $Oxy$, parte do gráfico da função real de variável real $h$, definida por $h(x)=2^{x-2}-4$, e o triângulo $[ABO]$, em que $A$ e $B$ são os pontos de interseção do gráfico de $h$ com os eixos coordenados.




Determina o perímetro do triângulo $[ABO]$.

**8.** Na figura ao lado, estão representadas graficamente, em referencial o.n. $Oxy$, as funções $f$ e $g$, reais de variável real, definidas por $f(x)=\log_2(x-1)+1$ e $g(x)=\log_{\frac{1}{2}}(4-x)+2$. Os pontos $A$ e $B$ são os pontos de interseção dos gráficos de $f$ e $g$.




**8.1** Determina o domínio de existência de cada função.

**8.2** Determina o zero da função $f$.

**8.3** Estuda as funções $f$ e $g$ quanto à existência de assíntotas ao seu gráfico.

Na tua resposta, apresenta as equações das assíntotas, caso existam.

**8.4** Determina a distância entre os pontos $A$ e $B$.

**9.** Seja $h$ a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

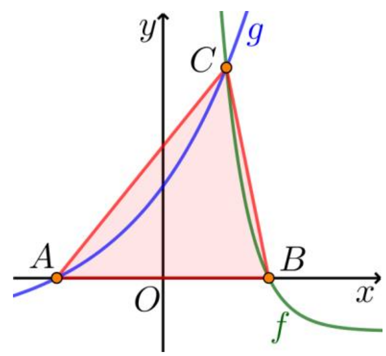
$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x^2-x} & \text{se } x<0\\ \dfrac{x-1}{x+1} & \text{se } x\geq 0\end{cases}$$

**9.1** Averigua se a função $h$ é contínua em $x=0$.

**9.2** Estuda a função $h$ quanto à existência de assíntotas ao seu gráfico.

Na tua resposta, apresenta as equações das assíntotas, caso existam.

**10.** Na figura ao lado, estão representados, em referencial o.n. $Oxy$:




- as funções $f$ e $g$, de domínio $\mathbb{R}$, definidas por $f(x)=e^{-2x+4}-1$ e $g(x)=e^{\frac{1}{2}x+1}-1$;
- o triângulo $[ABC]$, em que $A$ e $B$ são os pontos de interseção dos gráficos de $f$ e $g$ com o eixo das abcissas e $C$ é o ponto de interseção dos gráficos.

Determina a área do triângulo $[ABC]$.

**11.** Seja $g$ a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x)=\ln x$ e seja $f$ a função quadrática definida por $f(x)=x^2-4$.

O domínio da função $g\circ f$ é:

**(A)** $]-2,\ 2[$

**(B)** $]-\infty,\ -2[\cup]2,+\infty[$

**(C)** $[-2,\ 2]$

**(D)** $]-\infty,\ -2]\cup[2,+\infty[$

**12.** Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{e^{x-3}-1}$ ?

**(A)** 1 **(B)** 3 **(C)** 6 **(D)** 9

**13.** Seja $g$ a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x)=2^x x^2$.

**13.1** Mostra, recorrendo ao teorema de Lagrange, que existe um ponto do intervalo $]-4,-2[$ em que a derivada da função $g$ é nula.

**13.2** Mostra, recorrendo o teorema de Bolzano-Cauchy, que a equação $g(x)=1$ tem uma solução no intervalo $]0,1[$.

**13.3** Determina, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, a solução da equação $g(x)=1$ no intervalo $]0,1[$, que se sabe ser única.

Na tua resposta:

- reproduz, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que te permite(m) resolver a equação;

- apresenta o valor pedido arredondado às centésimas.

**13.4** Sabe-se que o gráfico da função $g$ tem uma única reta tangente com declive $2$ no intervalo $]0,1[$.

Determina, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, a abcissa do ponto de tangência dessa reta.

Na tua resposta:

- equaciona o problema;

- reproduz, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que te permite(m) resolver a equação;

- apresenta o valor pedido arredondado às centésimas.

**14.** Uma chávena de café foi servida a um cliente de um restaurante à temperatura de $28^{\circ}\mathrm{C}$ A temperatura ambiente da sala do restaurante onde o café foi servido era $20^{\circ}\mathrm{C}$.

Sabe-se que a expressão que dá a temperatura do café em função do tempo, em minutos, decorrido desde que foi servido ($t=0$) é da forma:

$$T(t)=T_A+ae^{bt}, \quad a,b\in\mathbb{R}$$

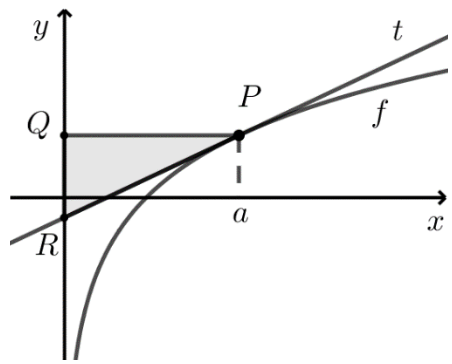
Sabe-se que, $10$ minutos depois de o café ter sido servido, a sua temperatura passou a ser $45^{\circ}\mathrm{C}$.

Determina os valores das constantes $a$ e $b$.

Apresenta o valor de $b$ com arredondado às milésimas.

**15.** Na figura seguinte, estão representados, em referencial o.n. $Oxy$:

- parte do gráfico da função $f$, real de variável real, definida por $f(x) = \ln x$;
- a reta $t$, tangente ao gráfico de $f$ no ponto $P$, de abcissa $a$, com $a > 0$;
- o triângulo $[PQR]$, sendo a reta $PQ$ paralela ao eixo $Ox$ e o vértice $R$ o ponto de interseção da reta $t$ com o eixo das ordenadas.




Mostra que o valor da área do triângulo $[PQR]$ é igual a $\frac{a}{2}$, para qualquer $a > 0$.

## **DOMÍNIO:** Números complexos

**1.** Seja $z = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$, um número complexo.

Mostra que $\operatorname{Re}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$ e que $\operatorname{Im}(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$.

**2.** Considera um número complexo $w = a + bi$, com $a \in \mathbb{R}^+$ e $b \in \mathbb{R}^-$.

Em que quadrante do plano de Argand se localiza o afixo do número complexo $-\overline{w}$?

**(A)** Primeiro **(B)** Segundo **(C)** Terceiro **(D)** Quarto

**3.** A condição em variável complexa $\operatorname{Im}(z) = -\operatorname{Re}(z)$ define, no plano complexo:

**(A)** o eixo real.

**(B)** o eixo imaginário.

**(C)** a reunião das bissetrizes dos quadrantes ímpares.

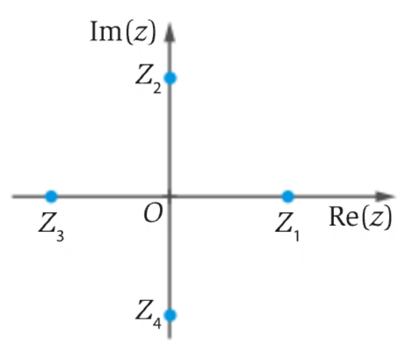
**(D)** a reunião das bissetrizes dos quadrantes pares.

**4.** Resolve, em $\mathbb{C}$, a equação $z + 3i = 3\overline{z}i$.

**5.** Seja $z = r\,e^{i\frac{3\pi}{4}}$ $(r > 0)$ um número complexo.

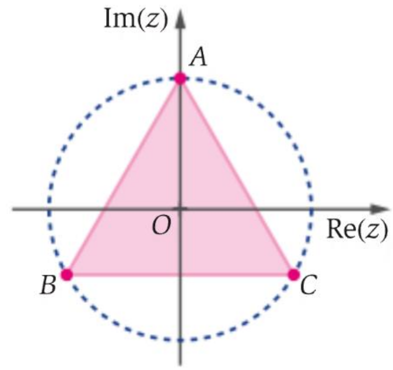
Na figura ao lado, estão representados os afixos de quatro números complexos.

Qual dos afixos corresponde ao número complexo $-\dfrac{z}{\overline{z}}$?




**(A)** $Z_1$ **(B)** $Z_2$ **(C)** $Z_3$ **(D)** $Z_4$

**6.** Na figura seguinte, estão representados, no plano de Argand, uma circunferência de raio 1 e o triângulo $[ABC]$, inscrito nessa circunferência. Os pontos $A$, $B$ e $C$ são os afixos dos números complexos $z_1$, $z_2$ e $z_3$.




**6.1** Apresenta $z_1$, $z_2$ e $z_3$ na forma trigonométrica.

**6.2** Mostra que $z_1^{\,3} = z_2^{\,3} = z_3^{\,3}$.

**6.3** Identifica o número complexo $z$ cujas três raízes cúbicas são $z_1$, $z_2$ e $z_3$. Escreve-o na forma algébrica.

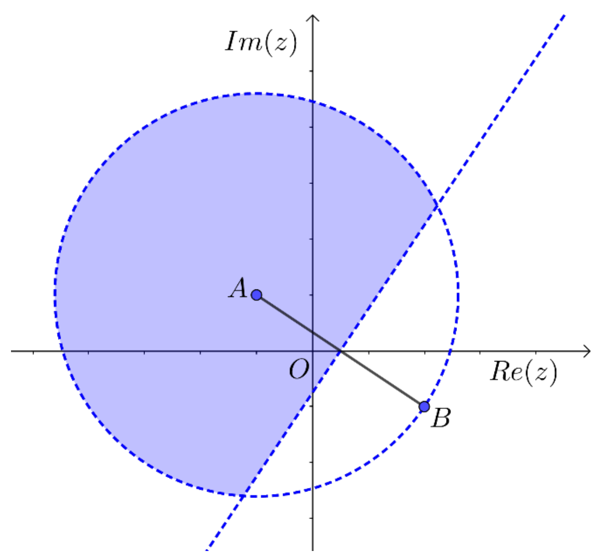
**7.** Considera, em $\mathbb{C}$, a equação $z^4 = 16$.

Os afixos dos números complexos que são solução desta equação são vértices de um polígono regular.

Representa esse polígono regular no plano complexo, identifica-o, e calcula a sua área.

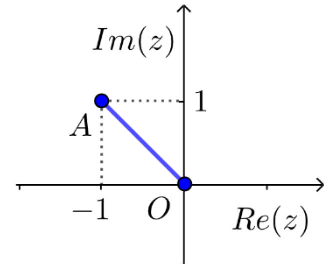
**8.** Na figura ao lado, estão representados, no plano complexo:

- os pontos $A$ e $B$, de coordenadas $(-1,1)$ e $(2,-1)$, respetivamente;
- o segmento de reta $[AB]$ e a sua mediatriz;
- a circunferência de centro $A$ e raio $[AB]$.




Determina uma condição, em variável complexa, que defina o conjunto dos pontos representado a sombreado na figura, excluindo a fronteira.

**9.** Qual das seguintes condições, em variável complexa, define o segmento de reta $[AO]$, representado no Plano de Argand, na figura ao lado?




**(A)** $Arg(z)=\frac{3\pi}{4}$

**(B)** $Arg(z)=\frac{3\pi}{4}\wedge|z|\leq 1$

**(C)** $|z|\leq\sqrt{2}$

**(D)** $Arg(z)=\frac{3\pi}{4}\wedge|z|\leq\sqrt{2}$

**10.** Considera os números complexos $z=2e^{i\theta}$ e $w=-2-2i$.

Determina os valores de $\theta$ para os quais $\frac{2i\,z}{\overline{w}}$ é um número real.

## SOLUÇÕES

### Cálculo combinatório e probabilidades

**1.** (C)

**2.** (C)

**3.** (A)

**4.** $286x^2$

**5.** $60480$ $(8\times 7\times 6^3\times 5)$

**6.1** (A)

**6.2** $\frac{1}{7}$

**7.** $1{,}5\%$ $\left(\frac{{}^{12}A_5}{{}^{25}A_5}\right)$

**8.** $\frac{2}{3}$

**9.1** Probabilidade de o número da bola retirada ser ímpar e maior do que $7$ ; $\frac{1}{10}$.

**9.2** Probabilidade de o número da bola retirada ser par, sabendo que é menor ou igual a $7$ ; $\frac{3}{7}$.

**10.2** $\frac{19}{30}$

### Funções reais de variável real

**1.** (C)

**2.1** (C)

**2.2.1** (C)

**2.2.2** (D)

**3.** (B)

**4.1** $f$ é contínua em $\left]-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right[$ (no seu domínio).

**4.2** $g$ é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

**5.1** O gráfico de $f$ tem uma assíntota oblíqua de equação $y = 2x$ (em $-\infty$ e $+\infty$).

**5.2** O gráfico de $g$ tem uma assíntota vertical (bilateral) de equação $x = 2$ e uma assíntota oblíqua de equação $y = -3x - 6$ (em $-\infty$ e $+\infty$).

**6.** $g$ é crescente em $]-\infty, -3]$ e em $[0, 3]$; $g$ é decrescente em $[-3, 0]$ e em $[3, +\infty[$; $g(-3) = g(3) = 100$ é o máximo absoluto (também relativo) de $g$ e $g(0) = 19$ é um mínimo relativo de $g$.

**7.** $f$ é crescente em $]-\infty, -1]$ e em $[1, +\infty[$; $g$ é decrescente em $[-1, 1]$; $f(-1) = 2$ é um máximo relativo de $f$ e $f(1) = -2$ é um mínimo relativo de $f$ .

**8.** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{g(x)}{x} = 4$; $\lim\limits_{x \to -\infty} (g(x) - 4x) = 2$. Equação da assíntota: $y = 4x + 2$.

**9.** $2904 \text{ cm}^2$

**10.** (D) **11.** 0 **12.1** (B) **12.2** (B)

**13.1** (C) **13.2** (C) **13.3** (A)

**14.1** $f''(x) = \dfrac{3}{4\sqrt{x-1}}$

**14.2** $f''(x) = \dfrac{-2x^2 - x + 1}{(x+1)^2 (x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 1}}$

**15.** O gráfico da função g tem apenas uma assíntota (oblíqua) de equação $y = x - 2$.

**16.2** $0,48$

**17.** $(-1, -8)$

**18.** 12

**Trigonometria e funções trigonométricas**

**1.** (D)

**2.1** (A)

**2.2** (C)

**3.1** (D)

**3.2** (A)

**4.** $\frac{\sqrt{3}}{6}\pi^3$

**5.1** $g$ é contínua em $x=0$.

**5.2** $g$ é diferenciável em $x=0$; $g'(0)=1$.

**5.3** O gráfico de $g$ tem duas assíntotas horizontais de equações $x=-\frac{4}{3}$ e $x=0$.

**5.4** $0,04$

**Funções exponenciais e funções logarítmicas**

**1.** (B)

**2.** (C)

**3.** (D)

**4.** (C)

**5.** (A)

**6.** (A)

**7.** $\frac{\sqrt{481}+31}{4}$

**8.1** $D_f = ]1,+\infty[$ ; $D_g = ]-\infty, 4[$

**8.2** $\frac{3}{2}$

**8.3** O gráfico de $f$ tem uma assíntota vertical de equação $x=1$ e o gráfico de $g$ tem uma assíntota vertical de equação $x=4$.

**8.4** $\sqrt{2}$

**9.1** A função $h$ é contínua em $x=0$.

**9.2** O gráfico de $h$ tem duas assíntotas horizontais de equações $x=0$ e $x=1$.

**10.** $2e^{\frac{8}{5}}-2$.

**11.** (B)

**12.** (C)

**13.3** $0,77$

**13.4** $0,57$

**14.** $a=60$ e $b\approx -0,088$.

## Números complexos

**2.** (C)

**3.** (D)

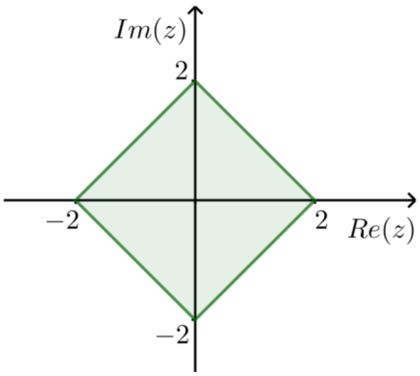
**4.** $z = \frac{9}{8} + \frac{3}{8}i$

**5.** (B)

**6.1** $z_1 = e^{i\frac{\pi}{2}}$, $z_2 = e^{i\frac{7\pi}{6}}$ e $z_3 = e^{i\frac{11\pi}{6}}$ .

**6.3** $-i$

**7.** Quadrado de área 8.




**8.** $|z+1-i| < \sqrt{13} \wedge |z+1-i| < |z-2+i|$

**9.** (D)

**10.** $\theta = \frac{\pi}{4} + k\pi \, (k \in \mathbb{Z})$