CADERNO 1
(É permitido o uso de calculadora gráfica.)

1. Seja X o conjunto das abcissas inteiras dos pontos do paralelepípedo.

$X=\{x\in\mathbb{Z}:-4\leq x\leq 4\}=\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$

$\#X=9$

Seja Y o conjunto das ordenadas inteiras dos pontos do paralelepípedo.

$Y=\left\{y\in\mathbb{Z}:0\leq y<\sqrt{27}\right\}=\{0,1,2,3,4,5\}$

$\#Y=6$

Seja Z o conjunto das cotas inteiras dos pontos do paralelepípedo.

$Z=\{z\in\mathbb{Z}:0\leq z<\pi\}=\{0,1,2,3\}$

$\#Z=4$

Seja A o conjunto de pontos de coordenadas inteiras do paralelepípedo.

$A=X\times Y\times Z=\{(x,y,z):x\in X\wedge y\in Y\wedge z\in Z\}$

$\#A=\#X\times Y\times Z=\#X\times\#Y\times\#Z=9\times6\times4=216$

Resposta: Opção (B)

2.1. $8\times{}^{10}A'_4-1=8\times10^4-1=79999$

Resposta: 79 999 códigos

2.2. ${}^5C_2\times{}^9A_3=10\times504=5040$

Resposta: 5040 códigos

2.3. $10\times{}^5C_3\times{}^9A'_2=10\times10\times9^2=8100$

Resposta: 8100 códigos

3. $\left(x-\sqrt{x}\right)^8=\sum_{k=0}^{8}{}^8C_k x^{8-k}\left(-\sqrt{x}\right)^k=\sum_{k=0}^{8}(-1)^k\,{}^8C_k x^{8-k+\frac{k}{2}}=\sum_{k=0}^{8}(-1)^k\,{}^8C_k x^{\frac{16-k}{2}}$

O termo em x^5 surge quando $\frac{16-k}{2}=5$, ou seja, $k=6$.

O termo correspondente a $k=6$ é $(-1)^6\,{}^8C_6x^5$.

O coeficiente deste termo é $(-1)^6\,{}^8C_6=28$.

Resposta: Opção (D)

4. Como $V+F=A+2$, tem-se $V+12=30+2$, ou seja, $V=20$.

Número de retas definidas pelo conjunto dos vértices: ${}^{20}C_2=190$

Número de retas definidas pelos vértices que não contêm arestas: ${}^{20}C_2-30=190-30=160$

Resposta: 160 retas

5.1. O Rui faz parte do grupo e a Daniela não: ${}^{11}C_2\times{}^{15}C_3=25\ 025$

ou

A Daniela Faz parte do grupo e o Rui não: ${}^{11}C_3\times{}^{15}C_2=17\ 325$

ou

O Rui e a Daniela Não fazem parte do grupo: ${}^{11}C_3\times{}^{15}C_3=75\ 075$

Número total de maneira para formar o grupo: $25\,025+17\,325+75\,075=117\,425$

Resposta: 117 425

5.2. Número de casos favoráveis: ${}^{12}C_3\times{}^{16}C_5\times{}^{12}A_8\times{}^{48}A_{20}$

Número de casos possíveis: ${}^{60}A_{28}$

Seja P a probabilidade pedida.

$$P=\frac{{}^{12}C_3\times{}^{16}C_5\times{}^{12}A_8\times{}^{48}A_{20}}{{}^{60}A_{28}}$$

$P\approx 0{,}025$

Resposta: $0{,}025$

CADERNO 2

(Não é permitido o uso de calculadora.)

6.1. **a)** $^{6}C_{3}=\dfrac{6!}{3!(6-3)!}=\dfrac{\cancel{3!}\times 4\times 5\times 6}{\cancel{3!}\times 6}=20$

Resposta: 20 grupo de quatro rolos

b) $^{6}C_{4}=\dfrac{6!}{4!(6-4)!}=\dfrac{\cancel{4!}\times 5\times 6}{\cancel{4!}\times 2}=15$

Resposta: 15 grupo de quatro rolos

6.2. Os três rolos, vermelho, verde e amarelo, formam um grupo que se irá juntar aos restantes quatro rolos.

Os quatro rolos mais o grupo de três rolos (cinco elementos) podem permutar entre si de $5!$ maneiras. O grupo de três rolos também podem permutar entre si de 3! maneiras.

Assim, o número total de maneiras é dado por $5!\times 3!$.

Resposta: $5!\times 3!$

7. Existem duas diagonais.

O preenchimento de uma diagonal com peças iguais tem duas possibilidades.

Restam seis lugares para escolher um subconjunto de três lugares para as peças que não ficam na diagonal.

Assim, tem-se:

$$2\times 2\times {}^{6}C_{3}=4\times\frac{6!}{3!\times 3!}=4\times\frac{3!\times 4\times 5\times 6}{3!\times 6}=80$$

Resposta: 80

8. $A=\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ e $B=\{3,6,9,12\}$

$$P\left(\overline{A\cup\overline{B}}\right)=P\left(\overline{A}\cap B\right)$$

Como $\overline{A}\cap B=\{6,12\}$, tem-se $P\left(\overline{A}\cap B\right)=\dfrac{2}{12}=\dfrac{1}{6}$.

Resposta: $\dfrac{1}{6}$

9.1. $^{n}C_0 + {}^{n}C_1 + {}^{n}C_2 = a$

Pretende-se mostrar que $^{n+1}C_0 + {}^{n+1}C_1 + {}^{n+1}C_2 = 1 + a + n$.

Sabe-se que:

. $^{n}C_1 = n$

. $^{n+1}C_0 = 1$

. $^{n+1}C_1 = {}^{n}C_0 + {}^{n}C_1$

. $^{n+1}C_2 = {}^{n}C_1 + {}^{n}C_2$

Então:

$^{n+1}C_0 + {}^{n+1}C_1 + {}^{n+1}C_2 = 1 + {}^{n}C_0 + {}^{n}C_1 + {}^{n}C_1 + {}^{n}C_2 = 1 + {}^{n}C_0 + {}^{n}C_1 + {}^{n}C_2 + {}^{n}C_1 = 1 + a + n$

Assim, conclui-se que $^{n+1}C_0 + {}^{n+1}C_1 + {}^{n+1}C_2 = 1 + a + n$, sendo $^{n}C_0 + {}^{n}C_1 + {}^{n}C_2 = a$.

9.2. Soma dos três primeiros elementos de uma linha do Triângulo de Pascal:

$^{n}C_0 + {}^{n}C_1 + {}^{n}C_2 = a$

Soma dos três últimos elementos da linha seguinte:

$^{n+1}C_{n+1} + {}^{n+1}C_n + {}^{n+1}C_{n-1} = {}^{n+1}C_0 + {}^{n+1}C_1 + {}^{n+1}C_2 = 1 + a + n$

Então, $1 + a + n - a = 30$. Daqui resulta que $n = 29$.

Na linha em que $n = 29$ há 30 elementos e na linha seguinte há 31.

Assim, nas duas linhas há 61 elementos no total.