CADERNO 1

(É permitido o uso de calculadora gráfica)

1.1. Números das bolas azuis: 1; 3; 5; 7; 9; 11; 13; 15.

1, 3, 5, 7, 9, $\boxed{11, 13, 15}$

6! (permutações dos seis elementos, sendo um deles constituído por 11, 13 e 15)

3! (permutações dos três números que ocupam ordens consecutivas)

Número de sequências diferentes das bolas azuis em que as que têm número com dois algarismos ocupam ordens consecutivas: $6!\times 3! = 4320$

Resposta: 4320

1.2. Se a primeira bola a sair é azul, então saiu um número ímpar.

Ficam 15 bolas, sendo 8 com número par, umas vermelhas e outras pretas, sendo as restantes 7 azuis com número ímpar.

Seja x o número de bolas pretas. Então, $P\left(B\middle|A\right)=0,2 \Leftrightarrow \frac{x}{15}=0,2 \Leftrightarrow x=3$.

Das 8 bolas com número par, 3 são pretas e as restantes são vermelhas.

Assim, o número de bolas vermelhas é 5.

Resposta: 5 bolas vermelhas.

2. Há 4 pares de lugares opostos (frente a frente) que o casal Silva pode ocupar. Para cada um desses 4 pares de lugares os elementos do casal Silva podem trocar entre si.

Os restantes 6 elementos podem ser distribuídos pelos restantes 6 lugares.

Assim, o número total de maneiras diferentes, nas condições apresentadas é dado por: $(4\times 2!)\times 6!$, ou seja, 5760.

Resposta: Opção **(C)** 5760

3.

$$\left(\sqrt{x}-x\right)^9=\sum_{k=0}^{9} {}^9C_k\left(\sqrt{x}\right)^{9-k}(-x)^k=\sum_{k=0}^{9}(-1)^k\,{}^9C_2x^{\frac{9+k}{2}}$$

O termo de grau 6 resulta quando $\frac{9+k}{2}=6$, ou seja, $k=3$.

O coeficiente desse termo é dado por $(-1)^3\,{}^9C_3$, ou seja, -84.

Resposta: Opção **(A)** -84

4. Para $x>0$, tem-se $f'(x)=-\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x}$, ou seja, $f'(x)=\frac{-4+x}{x^2}$.

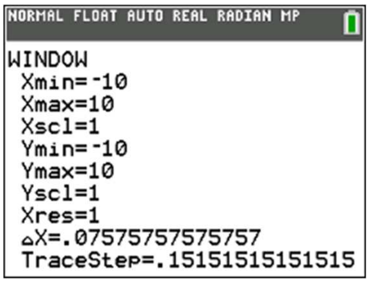
Seja m_r o declive da reta r e m_s o da reta *s*.

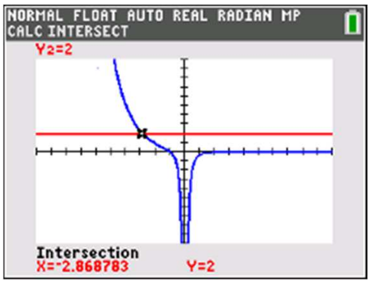
Tem-se $m_r=f'(2)=-\frac{1}{2}$. Então, $m_s=-\frac{1}{m_r}=2$.

Para $x<0$, tem-se $f'(x)=\frac{-e^{-x}\times 2x-2e^{-x}}{x^2}=\frac{-e^{-x}(2x+2)}{x^2}$.

A abcissa de *B* é solução da equação $\frac{-e^{-x}(2x+2)}{x^2}=2$.

Inserindo na calculadora as expressões $f'(x)=\frac{-e^{-x}(2x+2)}{x^2}$ e $g(x)=2$, podem visualizar-se as seguintes representações gráficas na janela indicada e identificar o ponto de interseção cuja abcissa é a do ponto *B*.





A abcissa do ponto *B* é, aproximadamente, –2,87.

Resposta: A abcissa do ponto *B*, arredondada às centésimas, é –2,87.

CADERNO 2

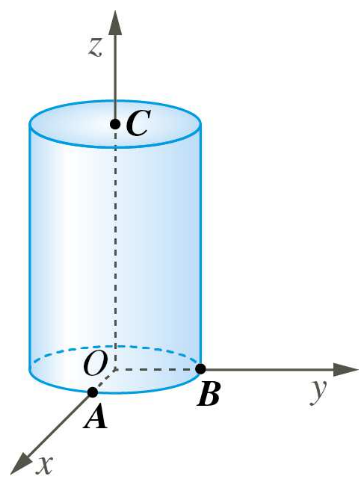
(Não é permitido o uso de calculadora gráfica)

1.1. Um vetor com a direção da reta *r* é, por exemplo, $\vec{u}(8,8,3)$.

Uma equação vetorial da reta *r*: $(x,\ y,\ z)=(1,-2,-1)+k(8,8,3)\ ;k\in\mathbb{R}$.

Resposta: Por exemplo, $(x,y,z))=(1,-2,-1)+k(8,8,3)\ ;k\in\mathbb{R}$.

1.2. As coordenadas do ponto *A* são do tipo: $(x,0,0)$.



O ponto *A* é a interseção do plano *ABC* com o eixo *Ox*.

$8x+0+0-24=0 \Leftrightarrow x=3$.

$A(3,0,0)$.

As coordenadas do ponto *C* são do tipo: $(0,0,z)$.

O ponto *C* é a interseção do plano *ABC* com o eixo *Oz*.

$0+0+3z-24=0 \Leftrightarrow z=8$.

$C(0,0,8)$.

Raio da base do cilindro: $\overline{OA}=3$

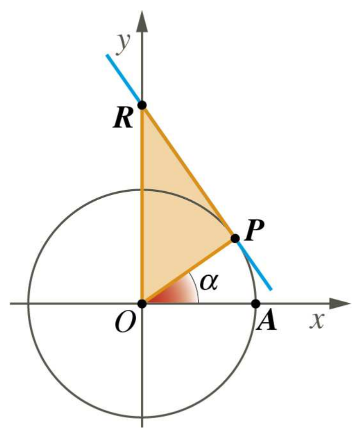
Altura do cilindro: $\overline{OC}=8$

Volume do cilindro: $V=\pi\times 3^2\times 8=72\pi$

Resposta: O volume do cilindro é 72π.

2.

2.1. $P\hat{O}R=\frac{\pi}{2}-\alpha$; $O\hat{R}P=\alpha$



$\overline{OP}=1$ e $\tan\left(O\hat{R}P\right)=\tan(\alpha)=\frac{1}{\overline{PR}}$. Daqui resulta que: $\overline{PR}=\frac{1}{\tan(\alpha)}$

A área do triângulo [*POR*] é dada por: $\frac{1\times\frac{1}{\tan(\alpha)}}{2}=\frac{\cos\alpha}{2\sin\alpha}$

Assim, tem-se: $f(\alpha)=\frac{\cos\alpha}{2\sin\alpha}$

2.2. $f(\alpha)=\frac{3}{2}\tan\alpha \ \wedge\ \alpha\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\Leftrightarrow \frac{\cos\alpha}{2\sin\alpha}=\frac{3\sin\alpha}{2\cos\alpha}\ \wedge\ \alpha\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos^2\alpha=3\sin^2\alpha\ \wedge\ \alpha\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\Leftrightarrow 1=4\sin^2\alpha\ \wedge\ \alpha\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

$\Leftrightarrow \left(\sin\alpha=\frac{1}{2}\vee\sin\alpha=-\frac{1}{2}\right)\wedge\ \alpha\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\Leftrightarrow \alpha=\frac{\pi}{6}$

Resposta: $\frac{\pi}{6}$

2.3. $f(\alpha)=\frac{\cos\alpha}{2\sin\alpha}$ e $]a,b[\subset\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

A função *f* é contínua em $[a,b]$; é o quociente entre funções contínuas em que $2\sin\alpha\neq 0$.

$$f'(\alpha)=\left(\frac{\cos\alpha}{2\sin\alpha}\right)'=\frac{-\sin\alpha(2\sin\alpha)-2\cos\alpha\cos\alpha}{4\sin^2\alpha}=\frac{-2\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)}{4\sin^2\alpha}=\frac{-1}{2\sin^2\alpha}$$

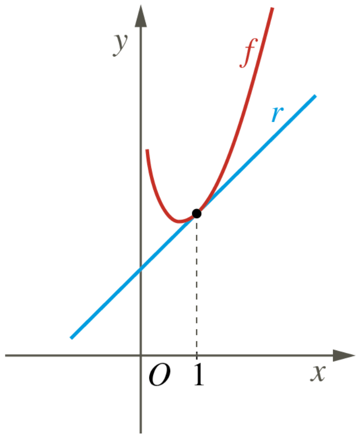
$\forall\alpha\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, $f'(\alpha)<0$. Daqui resulta que a função *f* é estritamente decrescente em $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

Assim, tem-se:

- *f* é contínua em $[a,b]$;
- *f* é estritamente decrescente em $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, em particular em $[a,b]$;
- $a<\frac{a+b}{2}<b$ e f decrescente, então $f(a)>f\left(\frac{a+b}{2}\right)>f(b)$, ou seja,
  $f(a)>k>f(b)$.

Recorrendo ao teorema de Bolzano, conclui-se que a equação $f(\alpha)=k$ tem solução pertencente a $]a,b[$. Como a função é decrescente, conclui-se que a solução é única.

3.1. $2x-2y+3=0 \Leftrightarrow y=x+\dfrac{3}{2}$



A ordenada do ponto da reta $y=x+\dfrac{3}{2}$ de abcissa 1 é igual à ordenada do ponto do gráfico de *f* de abcissa 1.

Assim, $f(1)=1+\dfrac{3}{2}$, ou seja, $1^2-\ln(1)+k=\dfrac{5}{2} \Leftrightarrow k=\dfrac{5}{2}-1 \Leftrightarrow k=\dfrac{3}{2}$

Resposta: opção **(D)** $1,5$

3.2. Se $k=2$, então $f(x)=x^2-\ln(x)+2$

$$\lim u_n = \lim\left(1+\frac{2}{n}\right)^n = e^2.$$

$$\lim f(u_n)=\lim\left((u_n)^2-\ln(u_n)+2\right)=\left(e^2\right)^2-\ln\left(e^2\right)+2=e^4-2+2=e^4$$

Resposta: Opção **(A)** e^4

4.1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{-2x}-\dfrac{5-6e^x}{e^x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{-2x}-\dfrac{5}{e^x}+6\right)=0-0+6=6$

A reta de equação $y=6$ é assíntota horizontal ao gráfico de *f*, quando $x\to+\infty$.

4.2. $\forall x\in\mathbb{R},\quad f'(x)=-2e^{-2x}+5e^{-x}$

$$f''(x)=\left(-2e^{-2x}+5e^{-x}\right)'=4e^{-2x}-5e^{-x}$$

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow 4e^{-2x}-5e^{-x}=0 \Leftrightarrow e^{-x}\left(4e^{-x}-5\right)=0 \Leftrightarrow 4e^{-x}-5=0$$

$$\Leftrightarrow e^{-x}=\frac{5}{4} \Leftrightarrow -x=\ln\left(\frac{5}{4}\right) \Leftrightarrow x=\ln\left(\frac{4}{5}\right)$$

x	$-\infty$	$\ln\left(\frac{4}{5}\right)$	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	–
f	$\cup$		$\cap$

Se $x \in \left]-\infty, \ln\left(\frac{4}{5}\right)\right[$ a concavidade é "voltada para cima".

Se $x \in \left]\ln\left(\frac{4}{5}\right), +\infty\right[$ a concavidade é "voltada para baixo".

O gráfico de *f* tem um ponto de inflexão que é o ponto de abcissa $\ln\left(\frac{4}{5}\right)$.

4.3. $f(x)=0 \Leftrightarrow e^{-2x}-\frac{5-6e^{x}}{e^{x}}=0 \Leftrightarrow e^{-x}-5+6e^{x}=0 \Leftrightarrow 6e^{2x}-5e^{x}+1=0$

$\Leftrightarrow e^{x}=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{12} \Leftrightarrow e^{x}=\frac{1}{2} \vee e^{x}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow x=\ln\left(\frac{1}{2}\right) \vee x=\ln\left(\frac{1}{3}\right)$.

Assim, $a+b=\ln\left(\frac{1}{2}\right)+\ln\left(\frac{1}{3}\right)=\ln\left(\frac{1}{6}\right)=-\ln(6)$.

5.1. $h'(x)=(f\circ g)'(x)=f'(g(x))\times g'(x)$

$f'(x)=\left(e^{3x}-3x\right)'=3e^{3x}-3$ e $g'(x)=\left(\cos^2 x\right)'=2\cos x(-\sin x)=-\sin(2x)$

$h'(\pi)=(f\circ g)'(\pi)=f'(g(\pi))\times g'(\pi)=f'(1)\times(-\sin(2\pi))=0$

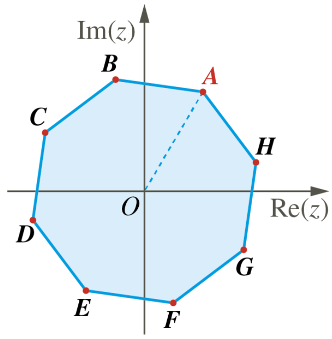
Resposta: opção **(D)** 0

5.2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3e^{3x}-3}{-2\cos x\sin x}=-3\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{\sin(2x)}=-3\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{e^{3x}-1}{3x}\times 3x}{\frac{\sin(2x)}{2x}\times 2x}=$

$=-\frac{9}{2}\times\frac{\lim\limits_{3x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{3x}}{\lim\limits_{2x\to 0}\frac{\sin(2x)}{2x}}=-\frac{9}{2}\times\frac{1}{1}=-\frac{9}{2}$

Resposta: $-\frac{9}{2}$

6.1. Eixo de simetria é a mediatriz de $[AC]$.



$$z_A = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + \sqrt{3}\,i$$

$$z_C = 2e^{i\left(\frac{\pi}{3}+2\times\frac{\pi}{4}\right)} = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3} + i$$

A mediatriz de $[AC]$ é definida pela condição:

$$|z - z_A| = |z - z_C| \Leftrightarrow \left|z - \left(1+\sqrt{3}\,i\right)\right| = \left|z - \left(-\sqrt{3}+i\right)\right| \Leftrightarrow \left|z - 1 - \sqrt{3}\,i\right| = \left|z + \sqrt{3} - i\right|$$

Resposta: opção **(B)** $\left|z - 1 - \sqrt{3}\,i\right| = \left|z + \sqrt{3} - i\right|$

6.2.

a) $z_B = 2e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)} = 2e^{i\frac{7\pi}{12}}$

Resposta: $z_B = 2e^{i\frac{7\pi}{12}}$

b) $z_H = 2e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)} = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$$= 2\left(\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}\right) + \left(\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}\right)i\right)$$

$$= 2\left(\left(\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\right)i\right) = 2\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}i$$

7. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considera a condição $z.\overline{z} + 4\,\mathrm{Re}(z) = 2\,\mathrm{Im}(z)$.

No plano complexo, a condição dada corresponde ao mesmo conjunto de pontos definido pela condição $|z - z_0| = r$, com $r \in \mathbb{R}^+$.

Seja $z = x + yi$.

$$z.\overline{z} + 4\,\mathrm{Re}(z) = 2\,\mathrm{Im}(z) \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 4x = 2y$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 - 4 + y^2 - 2y + 1 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x+2)^2 + (y-1)^2 = 5$$

A condição dada representa uma circunferência de centro no ponto $C(-2, 1)$ e raio $\sqrt{5}$.

$|z - z_0| = r$. Assim, tem-se: $z_0 = -2 + i$ e $r = \sqrt{5}$.