



Nome: _____

Ano / Turma: _____ N.º: _____

Data: ____ - ____ - ____

-
- Não é permitido o uso de corretor. Deves riscar aquilo que pretendes que não seja classificado.
 - A prova inclui um formulário.
 - As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.
-

CADERNO 1
(É permitido o uso de calculadora gráfica)

1. Numa caixa há 16 bolas numeradas de 1 a 16.

As bolas com número ímpar são azuis. As bolas com número par, umas são vermelhas e as restantes são pretas.

1.1. As bolas azuis são colocadas, lado a lado, constituindo uma sequência numérica, com 8 termos.

Quantas sequências diferentes é possível representar se os termos formados pelos números de dois algarismos ocuparem ordens consecutivas?

1.2. Da caixa, com as 16 bolas, ao acaso, são retiradas sucessivamente, sem reposição duas bolas.

Considera os acontecimentos:

A : “a primeira bola extraída é azul”

B : “a segunda bola extraída é preta”

Sabe-se que $P(B|A) = 0,2$.

Determina o número de bolas vermelhas.

2. Oito amigos, entre eles o casal Silva, jantam num restaurante ocupando uma mesa com oito lugares. Tal como é sugerido pela figura, quatro lugares ficam de um dos lados da mesa e os outros quatro ficam do lado oposto.



De quantas maneiras diferentes é possível distribuir os oito lugares de modo que o casal Silva ocupe dois lugares opostos (frente a frente)?

(A) 2880

(B) 1440

(C) 5760

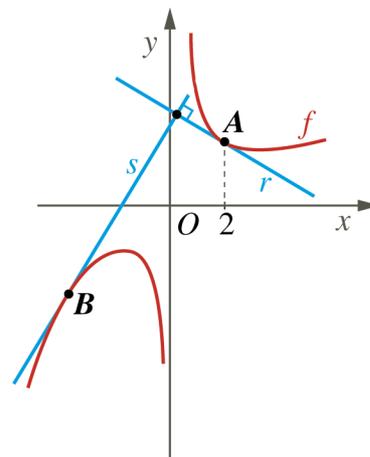
(D) 1152

3. No desenvolvimento de $(\sqrt{x} - x)^9$, pela fórmula do binómio de Newton, há um termo de grau 6. O coeficiente desse termo é:

- (A) -84 (B) 126 (C) -36 (D) 36

4. Considera a função f , de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{x} + \ln\left(\frac{x}{2}\right) & \text{se } x > 0 \\ \frac{e^{-x}}{2x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



Na figura estão representados, em referencial o.n. xOy , as retas r e s e o gráfico de f .

Sabe-se que:

- a reta r é tangente ao gráfico de f no ponto A de abscissa 2;
- a reta s é tangente ao gráfico de f no ponto B de abscissa negativa;
- as retas r e s são perpendiculares.

Determina a abscissa do ponto B , arredondada às centésimas, percorrendo as seguintes etapas:

- por processos exclusivamente analíticos, determina:
 - na forma reduzida, uma equação da reta r ;
 - uma expressão de $f'(x)$, para $x < 0$;
- indica a equação cuja solução é a abscissa do ponto B ;
- recorre às capacidades gráficas da calculadora e determina a abscissa de B , reproduzindo o gráfico ou gráficos de funções utilizadas, incluindo o referencial.

FIM (Caderno 1)

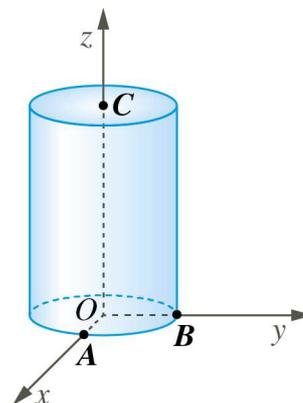
Cotações						Total
Questões – Caderno 1	1.1.	1.2.	2.	3.	4.	
Pontos	10	10	10	10	20	60

CADERNO 2
(Não é permitido o uso de calculadora)

1. Na figura, em referencial o.n. $Oxyz$, está representado um cilindro reto.

Sabe-se que:

- os pontos O e C são os centros das bases do cilindro;
- a base de centro O está contida no plano xOy ;
- os pontos A e B são as interseções da circunferência que limita a base de centro O com os semieixos positivos das abcissas e das ordenadas, respetivamente;
- o plano ABC é definido pela equação $8x + 8y + 3z - 24 = 0$.



1.1. Seja r a reta que passa no ponto $D(1, -2, -1)$ e é perpendicular ao plano ABC .

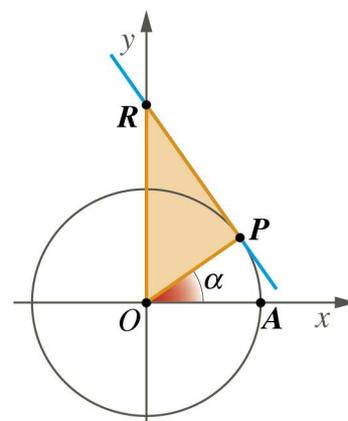
Representa a reta r através de uma equação na forma vetorial.

1.2. Determina o volume do cilindro.

2. Na figura estão representados o círculo trigonométrico e um triângulo $[OPR]$.

Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas $(1, 0)$;
- o ponto P pertence à circunferência trigonométrica, sendo $\widehat{AOP} = \alpha$, com $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$;
- a reta PR é tangente à circunferência trigonométrica no ponto P , sendo R o ponto de interseção dessa reta com Oy .



2.1. Seja f a função que $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ faz corresponder a área do triângulo $[POR]$.

Mostra que $\forall \alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $f(\alpha) = \frac{\cos \alpha}{2 \sin \alpha}$.

2.2. Resolve, em $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, a equação $f(\alpha) = \frac{3}{2} \tan \alpha$.

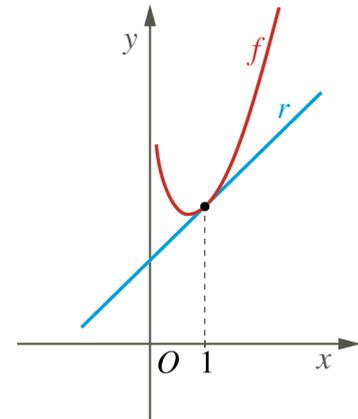
2.3. Seja $]a, b[\subset \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ e $k = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

Mostra que a equação $f(\alpha) = k$ tem uma e uma só solução.

3. Para cada número real k , considera a função f definida por:

$$f(x) = x^2 - \ln(x) + k \quad ; \quad k \in \mathbb{R}$$

3.1. Na figura, em referencial o.n. xOy , estão representadas uma das funções f e uma reta r tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 1.



A reta r é definida pela equação $2x - 2y + 3 = 0$.

O valor de k é:

- (A) 2,5 (B) 3 (C) 3,5 (D) 1,5

3.2. Considera $k = 2$ e a sucessão (u_n) de termo geral $u_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$.

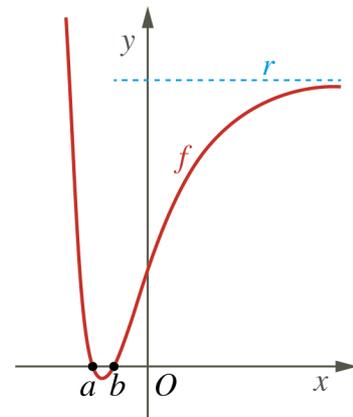
Pode-se concluir que $\lim f(u_n)$ é igual a:

- (A) e^4 (B) 0 (C) $+\infty$ (D) $e^2 + 2$

4. Seja f a função, de domínio \mathbb{R} , definida por:

$$f(x) = e^{-2x} - \frac{5 - 6e^x}{e^x}$$

Na figura, em referencial cartesiano xOy , estão as representações gráficas da função f e de uma reta r .



Sabe-se que:

- a reta r é assíntota horizontal do gráfico de f ;
- os zeros da função f são representados por a e b ;
- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -2e^{-2x} + 5e^{-x}$

4.1. Determina uma equação da reta r .

4.2. Estuda a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

4.3. Mostra que $a + b = -\ln(6)$.

5. Considera as funções f e g de domínio \mathbb{R} , definidas por:

$$f(x) = e^{3x} - 3x \quad \text{e} \quad g(x) = \cos^2 x.$$

5.1. Seja $h = f \circ g$.

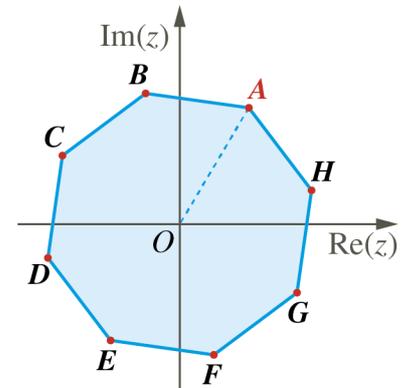
O valor de $h'(\pi)$ é igual a:

- (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\sqrt{e} - 3$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 0

5.2. Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

6. Na figura, no plano complexo, está representado um octógono regular $[ABCDEFGH]$ de centro no ponto O .

Sabe-se que o vértice A é a imagem geométrica do número complexo $z_A = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.



6.1. O vértice C é o simétrico do vértice A em relação a um eixo r . O eixo r é definido pela condição:

- (A) $|z - 1 + \sqrt{3}i| = |z + 1 - \sqrt{3}i|$ (B) $|z - 1 - \sqrt{3}i| = |z + \sqrt{3} - i|$
(C) $|z - \sqrt{3} + i| = |z + 1 - \sqrt{3}i|$ (D) $|z + \sqrt{3} - i| = |z - \sqrt{3} - i|$

6.2. Sejam z_B e z_H os números complexos que têm imagens geométricas, respetivamente, os pontos B e H .

a) Representa z_B na forma trigonométrica.

b) Mostra que $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}i$ é a representação de z_H na forma algébrica.

7. Em \mathbb{C} , conjunto dos números complexos, considera a condição

$$z\bar{z} + 4\operatorname{Re}(z) = 2\operatorname{Im}(z)$$

No plano complexo, a condição dada corresponde ao mesmo conjunto de pontos definido pela condição $|z - z_0| = r$, com $r \in \mathbb{R}^+$.

Determina z_0 e r .

Cotações																		
	Caderno 1 (com calculadora)																	
Questões	1.1.	1.2.	2.	3.	4.													
Pontos	10	10	10	10	20	Total												60
	Caderno 2 (sem calculadora)																	
Questões	1.1.	1.2.	2.1.	2.2.	2.3.	3.1.	3.2.	4.1.	4.2.	4.3.	5.1.	5.2.	6.1.	6.2.a)	6.2.b)	7.		
Pontos	5	8	10	10	8	10	10	8	8	10	10	10	10	5	8	10	Total	140
	Total																	200

FORMULÁRIO

GEOMETRIA

Comprimento de um arco de circunferência: αr

(α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;

r – raio)

Áreas de figuras planas

Polígono regular: $\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$

Setor circular: $\frac{\alpha r^2}{2}$

(α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$

(r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$

(r – raio)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r – raio)

PROGRESSÕES

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

TRIGONOMETRIA

$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

COMPLEXOS

$(\rho \text{ cis } \theta)^n = \rho^n \text{ cis}(n\theta)$ ou $(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho \text{ cis } \theta} = \sqrt[n]{\rho} \text{ cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ ou $\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$

($k \in \{0, \dots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$)

PROBABILIDADES

$\mu = p_1 x_1 + \dots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \dots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,9973$

REGRAS DE DERIVAÇÃO

$(u + v)' = u' + v'$

$(u v)' = u' v + u v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' v - u v'}{v^2}$

$(u^n)' = n u^{n-1} u'$ ($n \in \mathbb{R}$)

$(\sin u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' e^u$

$(a^u)' = u' a^u \ln a$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

LIMITES NOTÁVEIS

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ ($n \in \mathbb{N}$)

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$ ($p \in \mathbb{R}$)