CADERNO 1

(É permitido o uso de calculadora gráfica)

1.1. Qualquer ponto da reta *AB* é do tipo $\left(3, k, 3\sqrt{2}\right)$; $k \in \mathbb{R}$.

Em particular, o ponto *B* é do tipo $\left(3, k, 3\sqrt{2}\right)$; $k \in \mathbb{R}$ e pertence ao plano *BCE*.

Então, $2 \times k + \sqrt{2} \times 3\sqrt{2} - 12 = 0$. Daqui resulta que $k = 3$.

Se $k = 3$, então $B\left(3,\ 3,\ 3\sqrt{2}\right)$.

Resposta: $B\left(3,\ 3,\ 3\sqrt{2}\right)$

1.2. Para a primeira letra da sequência há três possibilidades.

O grupo das vogais e as restantes duas consoantes podem permutar entre si de $3!$ maneiras.

As vogais entre si podem permutar de $3!$ maneiras.

No total, o número de sequências a começar em consoante e as vogais juntas é dado por:

$$3 \times 3! \times 3!$$

$3 \times 3! \times 3! = 3 \times 6 \times 6 = 108$

Opção: (A) 108

1.3. Sejam *R* e *S* os seguintes acontecimentos:

R: "É escolhido o vértice *A*"

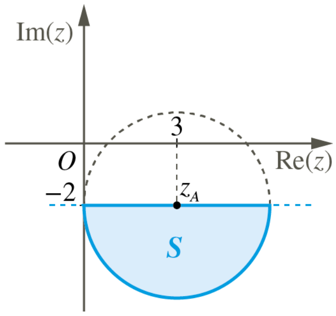
S: "A reta definida pelos pontos escolhidos não é paralela ao plano *xOy*"

Pretende-se obter o valor da seguinte probabilidade condicionada: $P\left(R|S\right)$

$$P\left(R|S\right) = \frac{P\left(R \cap S\right)}{P\left(S\right)} = \frac{\dfrac{^{2}C_{1}}{^{6}C_{2}}}{\dfrac{^{6}C_{2} - {}^{4}C_{2}}{^{6}C_{2}}} = \frac{\dfrac{2}{15}}{\dfrac{15-6}{15}} = \frac{2}{9}$$

Resposta: $\frac{2}{9}$

2. A condição dada define um semicírculo de raio 3, tal como está representado na figura.



Assim, o perímetro da região S é dado por:

$$2r+\frac{2\pi r}{2}=2r+\pi r=6+3\pi$$

$$6+3\pi\approx 15,42$$

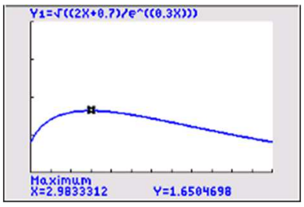
Opção: (C) 15,42

3. Área da mancha no momento em que foi detetada:

$$f(0)=\sqrt{\frac{0,7}{e^{0}}}=\sqrt{0,7}$$

O momento em que se procedeu à reparação corresponde ao máximo da função.

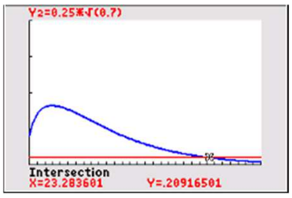
Após inserir a expressão da função na calculadora, identifica-se o instante em que esta atinge o valor máximo, considerando uma janela com $x_{\text{mín}}=0$, uma vez que $t\geq 0$.



Verifica-se que esse instante ocorre para $t\approx 2,9833$.

Pretende-se resolver a equação $f(x)=0,25\times\sqrt{0,7}$.

Para isso, insere-se a função definida por 25% da área detetada inicialmente, ou seja, $g(x)=0,25\times\sqrt{0,7}$ e identifica-se o ponto de interseção dos gráficos de f e g, fazendo o ajuste necessário à janela de visualização.



Identifica-se o ponto de coordenadas: $(23,284;\ 0,209)$

O tempo decorrido após a reparação é dado por: $23,284-2,983=20,301$.

$$0,301\times 60=18,06$$

Após a reparação decorreram, aproximadamente, 20,301 horas, ou seja, 20 h 18 min.

Resposta: 20 h 18 min

CADERNO 2

(Não é permitido o uso de calculadora gráfica)

1.1. $\cos\alpha = \frac{\overline{OA}}{2} \Rightarrow \overline{OA} = 2\cos\alpha$

$\sin\alpha = \frac{\overline{AB}}{2} \Rightarrow \overline{AB} = 2\sin\alpha$

Área do triângulo [OAB]: $\frac{\overline{OA}\times\overline{AB}}{2} = \frac{2\cos(\alpha)2\sin(\alpha)}{2} = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha) = \sin(2\alpha)$

Raio do semicírculo: $\frac{\overline{AB}}{2} = \frac{2\sin\alpha}{2} = \sin\alpha$

Área do semicírculo de raio $r = \sin\alpha$: $\frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi\sin^2(\alpha)}{2}$

Área da região sombreada: $f(\alpha) = \sin(2\alpha) + \frac{\pi\sin^2(\alpha)}{2}$

1.2. $\lim_{\alpha\to\frac{\pi}{8}} \frac{f(\alpha) - f\left(\frac{\pi}{8}\right)}{\alpha - \frac{\pi}{8}} = f'\left(\frac{\pi}{8}\right)$

$$f'(\alpha) = \left(\sin(2\alpha) + \frac{\pi\sin^2(\alpha)}{2}\right)' = 2\cos(2\alpha) + \frac{\pi}{2}\times 2\sin(\alpha)\cos(\alpha) = 2\cos(2\alpha) + \frac{\pi}{2}\sin(2\alpha)$$

$$f'\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\times\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}\,\pi}{4}$$

Opção: (D) $\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}\,\pi}{4}$

2.1. $5\cos\left(\frac{\pi t}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 5\left(\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) =$

$$= 5\times\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right) = 2{,}5\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right) = x(t)$$

Assim, tem-se $x(t) = 5\cos\left(\frac{\pi t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$.

2.2. **a)** $x(t)=5 \vee x(t)=-5 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=1 \ \vee\ \cos\left(\frac{\pi t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=-1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{\pi t}{2}+\frac{\pi}{4}=k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\ \wedge t\in[0,\,12] \Leftrightarrow 2t+1=4k\ ,\ k\in\mathbb{Z}\ \wedge t\in[0,12] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t=\frac{4k-1}{2}\ ,\ k\in\mathbb{Z}\ \wedge t\in[0,\,12] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t=1,5 \vee t=3,5 \vee t=5,5 \vee t=7,5 \vee t=9,5 \vee t=11,5$

Soluções: 1,5; 3,5; 5,5; 7,5; 9,5 e 11,5

b) $x(t)=5\cos\left(\frac{\pi t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$

$$x'(t)=\left(5\cos\left(\frac{\pi t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)'=-5\times\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$x''(t)=\left(-5\times\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)'=-5\times\frac{\pi}{2}\times\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 5\cos\left(\frac{\pi t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$x''(t)=-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 x(t)$$

Daqui resulta que $k=-\frac{\pi^2}{4}$.

Resposta: $-\frac{\pi^2}{4}$

c) $\lim\limits_{t\to\frac{1}{2}}\frac{x(t)}{2t-1}=\lim\limits_{t\to\frac{1}{2}}\frac{5\cos\left(\frac{\pi t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{2\left(t-\frac{1}{2}\right)}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{y\to0}\frac{5\cos\left(\frac{\pi}{2}\left(y+\frac{1}{2}\right)+\frac{\pi}{4}\right)}{2y}=\lim\limits_{y\to0}\frac{5\cos\left(\frac{\pi}{2}y+\frac{\pi}{2}\right)}{2y}$

Fazendo $t-\frac{1}{2}=y$, tem-se:

$$\lim_{t\to\frac{1}{2}}\frac{5\cos\left(\frac{\pi t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{2\left(t-\frac{1}{2}\right)}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{y\to0}\frac{5\cos\left(\frac{\pi}{2}\left(y+\frac{1}{2}\right)+\frac{\pi}{4}\right)}{2y}=\lim_{y\to0}\frac{5\cos\left(\frac{\pi}{2}y+\frac{\pi}{2}\right)}{2y}=\lim_{y\to0}\frac{-5\sin\left(\frac{\pi}{2}y\right)}{2y\times\frac{\pi}{2}\times\frac{2}{\pi}}=$$

$$=-\frac{5\pi}{4}\lim_{\frac{\pi}{2}y\to0}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}y\right)}{\frac{\pi}{2}y}=-\frac{5\pi}{4}\times1=-\frac{5\pi}{4}$$

Resposta: $-\frac{5\pi}{4}$

d) $x(t)=5\cos\left(\frac{\pi t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$

Período da função: $T=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$

Frequência do oscilador harmónico: $\frac{1}{T}=\frac{1}{4}$

Resposta: $\frac{1}{4}$

3. Se $z=a+b\mathrm{i}$, então $P(a,\, b)$.

$w=-\overline{z}\,\mathrm{i}=-(a-b\mathrm{i})\mathrm{i}=-(a\mathrm{i}+b)=-b-a\mathrm{i}$

Então, o afixo de w é o ponto de coordenadas $(-b,-a)$.

O ponto S é o único que pode ter coordenadas $(-b,-a)$.

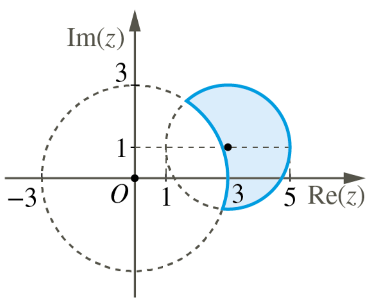
Opção: (C) S

4.1. $z_1=(2+\mathrm{i})^2-3\mathrm{i}=4+4\mathrm{i}-1-3\mathrm{i}=3+\mathrm{i}$

$$z_2=\frac{5\mathrm{i}}{\overline{z_1}}=\frac{5\mathrm{i}}{3-\mathrm{i}}=\frac{5\mathrm{i}(3+\mathrm{i})}{(3-\mathrm{i})(3+\mathrm{i})}=\frac{-5+15\mathrm{i}}{10}=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\mathrm{i}$$

Resposta: $z_2=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\mathrm{i}$

4.2. $|z-z_1|\le 2 \wedge |z|\ge 3$



$|z-z_1|\le 2 \rightarrow$ Representa um círculo de centro no ponto $(3,\,1)$ e raio 2.

$|z|\ge 3 \rightarrow$ Representa a parte exterior do círculo de centro $(0,0)$ e raio 3, incluindo a fronteira.