CADERNO 1

(É permitido o uso de calculadora gráfica)

1.

N.º de possibilidades para escolha da prateleira com dois ovos: 2

N.º de possibilidades para colocar os dois ovos iguais: 2×3

N.º de possibilidades de distribuir os restantes ovos: $3!$

Seja N o n.º de possibilidades final.

$N = 2\times 2\times 3\times 3! = 72$

Há 72 maneiras diferentes de fazer a decoração.

Resposta: Opção: (B)

2.

2.1. Se, decorridos dois anos, está reflorestada 58% da área ardida, então, falta reflorestar 48%.

$F(2)=0,48\times 58000 \Leftrightarrow 58\,000\mathrm{e}^{-2k}=0,48\times 58\,000 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-2k}=0,48 \Leftrightarrow -2k=\ln 0,48 \Leftrightarrow k=-\frac{\ln 0,48}{2}$.

Então, $k\approx 0,46$.

Resposta: O valor de k é, aproximadamente, 0,46.

2.2. a) Para $k=0,65$ tem-se $F(t)=58\,000\mathrm{e}^{-0,65t}$, $t\geq 0$.

$$\frac{F(t+1)}{F(t)}=\frac{58\,000\mathrm{e}^{-0,65(t+1)}}{58\,000\mathrm{e}^{-0,65t}}=\frac{\mathrm{e}^{-0,65t-0,65}}{\mathrm{e}^{-0,65t}}=\mathrm{e}^{-0,65}\approx 0,52$$

Em cada ano prevê-se que, no ano seguinte, a área por reflorestar será, aproximadamente, 52% da que falta reflorestar nesse ano.

2.2. b) $F(t)=0,02\times 58000 \Leftrightarrow 58\,000\mathrm{e}^{-0,65t}=0,02\times 58\,000 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-0,65t}=0,02 \Leftrightarrow t=\frac{\ln 0,02}{-0,65}$

Então, $t\approx 6$.

$2017+6=2023$

Resposta: Prevê-se que o plano seja cumprido em 2023.

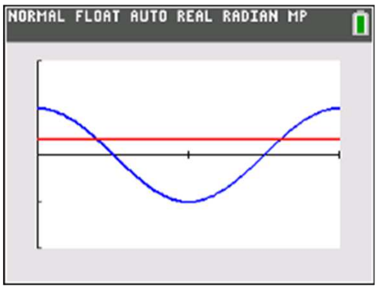
3.

3.1. $D_f = \mathbb{R}$

$f(x)=\cos(5x)\cos(3x)+\sin(5x)\sin(3x) \Leftrightarrow f(x)=\cos(5x-3x) \Leftrightarrow f(x)=\cos(2x) \Leftrightarrow$
$f(x)=\cos^2 x-\sin^2 x \Leftrightarrow f(x)=1-\sin^2 x-\sin^2 x \Leftrightarrow f(x)=1-2\sin^2 x$

Tem-se, $\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)=1-2\sin^2 x$, como se pretendia mostrar.

3.2. Recorrendo à calculadora gráfica é possível identificar o número de soluções em $[0,\pi]$.



Observa-se que há duas soluções.

Como o período positivo mínimo de f é π, em $[0,127\pi]$ há 254 soluções e em $[-350\pi,0[$ há 700 soluções.

Conclui-se que em $[-350\pi\,,127\pi]$ há 954 soluções.

Resposta: Opção (D) 954

CADERNO 2
(Não é permitido o uso de calculadora gráfica)

4. $f(x)=\frac{2}{5}\sqrt{25-x^2}$, domínio $[-5,5]$

4.1. Seja P o ponto de tangência.
$P(-3,f(-3))$.
$f(-3)=\frac{2}{5}\times\sqrt{25-9}=\frac{8}{5}$
Assim, $P\left(-3,\frac{8}{5}\right)$.

$$f'(x)=\left(\frac{2}{5}\sqrt{25-x^2}\right)'=\frac{2}{5}\times\frac{-2x}{2\sqrt{25-x^2}}=-\frac{2x}{5\sqrt{25-x^2}}$$

$$f'(-3)=\frac{6}{5\times4}=\frac{3}{10}$$

A equação da reta tangente no ponto de abcissa -3 é do tipo $y=\frac{3}{10}x+b$.

O ponto $P\left(-3,\frac{8}{5}\right)$ pertence à referida reta. Então, $\frac{8}{5}=-\frac{9}{10}+b$. Daqui resulta que $b=\frac{5}{2}$.

Uma equação, na forma reduzida, da reta tangente ao gráfico de *f*, no ponto de abcissa -3 é
$y=\frac{3}{10}x+\frac{5}{2}$.

Resposta: $y=\frac{3}{10}x+\frac{5}{2}$

4.2. A função derivada de *f* é definida por $f'(x)=-\dfrac{2x}{5\sqrt{25-x^2}}$, sendo o domínio $]-5,5[$.

$x+2y=0 \Leftrightarrow y=-\dfrac{1}{2}x$ (declive da reta é $-\dfrac{1}{2}$).
Duas retas são paralelas se e só se têm igual declive.

Assim, pretende-se provar que a equação $f'(x)=-\dfrac{1}{2}$ é possível no intervalo $]3,4[$.

A função f' é contínua no seu domínio, ou seja, em $]-5,5[$. Então é contínua em $[3,4]$, atendendo a que $[3,4]\subset]-5,5[$.

$f'(3)=\dfrac{-6}{5\sqrt{16}}=-\dfrac{3}{10}=-\dfrac{9}{30}$; $f'(4)=\dfrac{-8}{5\sqrt{9}}=-\dfrac{8}{15}=-\dfrac{16}{30}$ e $-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{15}{30}$.

Daqui resulta que $f'(4)<-\dfrac{1}{2}<f'(3)$.

Sendo *f* contínua em $[3,4]$ e $f'(4)<-\dfrac{1}{2}<f'(3)$, pelo Teorema de Bolzano, conclui-se que

$\exists c\in]3,4[:\ f'(c)=-\dfrac{1}{2}$. Como se pretendia provar.

4.3. Vértices extremos do eixo maior: $(-5,0)$ e $(5,0)$.
Daqui resulta que o eixo maior da elipse, $2a$, é igual a 10.
Assim, tem-se: $\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2a=10$

Resposta: Opção **(C)** 10

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(3x)}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\sin(3x)}{3x}\times 3x}{\dfrac{e^x-1}{x}\times x}=3\times\dfrac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(3x)}{3x}}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}}$

Repara que:

Fazendo $3x=y$, como $x\to 0$, então $y\to 0$, temos: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(3x)}{3x}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin y}{y}=1$ (limite notável)

E também se sabe que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$ (limite notável).

Então, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(3x)}{e^x-1}=3\times\dfrac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(3x)}{3x}}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}}=3\times\dfrac{1}{1}=3$.

Como a função é contínua $f(0)=3$, ou seja, $2^k=3\Leftrightarrow k=\log_2(3)$.

Resposta: $k=\log_2(3)$

6. $f(x)=\ln(kx)-kx \;,\; k>0$

6.1. $f'(x)=\left(\ln(kx)-kx\right)'=\frac{k}{kx}-k=\frac{1}{x}-k=\frac{1-kx}{x}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1-kx}{x}=0 \Leftrightarrow 1-kx=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{k}$

x	0		$\frac{1}{k}$	$-\infty$
$f'(x)$		+	0	–
f		$\nearrow$	$f\left(\frac{1}{k}\right)$	$\searrow$

$f\left(\frac{1}{k}\right)=\ln(1)-1=0-1=-1$

O ponto B tem coordenadas $\left(\frac{1}{k},f\left(\frac{1}{k}\right)\right)$, ou seja, $\left(\frac{1}{k},-1\right)$.

Área do retângulo $[OABC]$ é dada por: $|-1|\times\frac{1}{k}=\frac{1}{k}$.

Se $\frac{1}{k}=0,25$, ou seja, $\frac{1}{k}=\frac{1}{4}$, tem-se $k=4$.

Resposta: $k=4$

6.2. Se $k=2$, tem-se $f(x)=\ln(2x)-2x$.

a) $f(x)=\ln(2x)-2x \Leftrightarrow f(x)=\ln(2x)-\ln\left(e^{2x}\right) \Leftrightarrow f(x)=\ln\left(\frac{2x}{e^{2x}}\right)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{2x}{e^{2x}}\right)=\ln\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{e^{2x}}{2x}}\right)=\ln\left(\frac{1}{\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{2x}}\right).$$

Fazendo $2x=y$, se $x\to+\infty$, então $y\to+\infty$.

Assim, $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{2x}=\lim_{y\to+\infty}\frac{e^{y}}{y}=+\infty$ (limite notável)

Então, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\ln\left(\frac{1}{\lim_{y\to+\infty}\frac{e^{y}}{y}}\right)=\ln\left(0^{+}\right)=-\infty$.

Resposta: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(2x)-2x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2\dfrac{\ln(2x)}{2x}-2\right)$

Fazendo $2x=y$, se $x\to+\infty$, então $y\to+\infty$.

Assim, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(2x)}{2x}=\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{\ln y}{y}=0$ (limite notável)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}\lim_{x\to+\infty}\left(2\frac{\ln(y)}{y}-2\right)=2\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln(y)}{y}-2=2\times0-2=-2$$

Resposta: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-2$

7. $f(x)=\sin(3x)\cos x+\cos(3x)\sin x$

$f(x)=\sin(3x)\cos x+\cos(3x)\sin x=\sin(3x+x)=\sin(4x)$

7.1.

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin(4x)}{x}=4\lim_{x\to0^+}\frac{\sin(4x)}{4x}=4\lim_{y\to0^+}\frac{\sin y}{y}=4\times1=4$$

Resposta: $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}=4$

7.2. $f(x)=\dfrac{1}{2}\wedge x\in[0,\pi]$

$$f(x)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\sin(4x)=\sin\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow 4x=\frac{\pi}{6}+2k\pi\vee 4x=\pi-\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}\vee x=\frac{5\pi}{24}+\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x=\frac{\pi+12k\pi}{24}\vee x=\frac{5\pi+12k\pi}{24},\ k\in\mathbb{Z}$$

Como $x\in[0,\pi]$, as soluções, por ordem crescente, são:

$$x=\frac{\pi}{24}\vee x=\frac{5\pi}{24}\vee x=\frac{13\pi}{24}\vee x=\frac{17\pi}{24}$$

Assim, a distância entre os pontos *B* e *C* é dada por $\dfrac{13\pi}{24}-\dfrac{5\pi}{24}=\dfrac{8\pi}{24}=\dfrac{\pi}{3}$.

Resposta: $\overline{BC}=\dfrac{\pi}{3}$