Novo Espaço – Matemática A 12.º ano

Proposta de Teste [março - 2018]

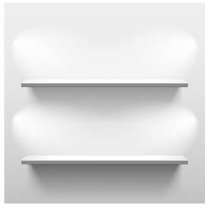
Nome: ____

Ano / Turma: _________ **N.º:** _____ **Data:** ___ / ____ / ___

- Não é permitido o uso de corretor. Deves riscar aquilo que pretendes que não seja classificado.
- A prova inclui um formulário.
- As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

CADERNO 1
(É permitido o uso de calculadora gráfica)

1. Cinco ovos de páscoa, dos quais apenas dois são iguais, vão ser distribuídos por duas prateleiras para decorar uma montra.



Indica o número de maneiras diferentes que pode ser feita a decoração, ficando dois ovos numa prateleira e três na outra, não ficando os dois ovos iguais na mesma prateleira**.**

(A) 24 **(B)** 72 **(C)** 36 **(D)** 240

2. Numa região, em 2017, um grande incêndio consumiu 58 000 hectares de floresta.

Foi feito um plano de reflorestação da área ardida.

Admita que *t* anos, após o fim do incêndio, a área por reflorestar, em hectares, é dada, para um certo valor de *k* positivo, pela função F definida por $F(t) = 58\,000\,\mathrm{e}^{-kt}$ $(t \geq 0)$.

Por processos exclusivamente analíticos, resolve as questões seguintes, recorrendo à calculadora para efetuar apenas cálculos numéricos.

2.1. Determina o valor de k, arredondado às centésimas, no caso de decorridos 2 anos estar reflorestada 58% da área ardida.

2.2. Considera $k = 0{,}65$.

a) Calcula $\dfrac{F(t+1)}{F(t)}$, arredondado às centésimas, e interpreta o resultado no contexto apresentado.

b) O plano é considerado cumprido quando faltar reflorestar 2% da área ardida.

Em que ano se prevê que o plano seja cumprido?

3. Considera a função *f*, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x)=\cos(5x)\cos(3x)+\sin(5x)\sin(3x)$$

3.1. Mostra que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x)=1-2\sin^2 x$.

3.2. Sabe-se que o período positivo mínimo de *f* é π.

Indica o número de soluções da equação $f(x)=\frac{1}{3}$, no intervalo $[-350\pi, 127\pi]$.

(A) 477 **(B)** 446 **(C)** 956 **(D)** 954

FIM (Caderno 1)

Cotações							Total
Questões - Caderno 1	1.	2.1.	2.2.a)	2.2.b)	3.1.	3.2.	
Pontos	10	15	15	15	15	10	80

CADERNO 2
(Não é permitido o uso de calculadora)

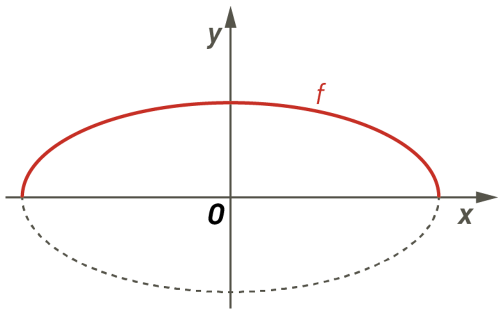
4. Considera a função *f* , de domínio $[-5,5]$, definida por $f(x)=\frac{2}{5}\sqrt{25-x^2}$.

4.1. Seja *r* a reta tangente ao gráfico de *f* no ponto de abcissa -3 .

Determina na forma reduzida uma equação da reta *r*.

4.2. Recorre ao Teorema de Bolzano e mostra que existe um ponto do gráfico de *f* com abcissa pertencente ao intervalo $]3,4[$ em que a reta tangente ao gráfico nesse ponto é paralela à reta de equação $x+2y=0$.

4.3. Na figura está representado o gráfico da função *f* que é uma semielipse de focos F_1 e F_2 .



Seja *P* um ponto qualquer do gráfico de *f*. Podes concluir que $\overline{PF_1}+\overline{PF_2}$ é igual a:

(A) 5 **(B)** 4 **(C)** 10 **(D)** 14

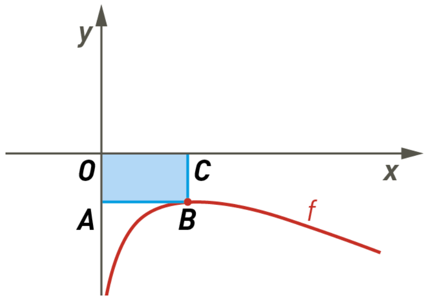
5. Seja k um número real positivo e *f* a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(3x)}{e^x-1} & \text{se } x\neq 0\\ 2^k & \text{se } x=0\end{cases}$$

Determina *k* sabendo que a função é contínua.

6. Seja *k* um número real positivo e *f* a função definida por $f(x)=\ln(kx)-kx$, $k>0$.

Na figura estão representados o gráfico de *f* e um retângulo [*OABC*].



Sabe-se que:

- a ordenada do ponto *B* é máximo absoluto da função *f*;
- o ponto *A* pertence a *Oy* e tem ordenada igual à de *B*;
- o ponto *C* pertence a *Ox* e tem abcissa igual à de *B*.

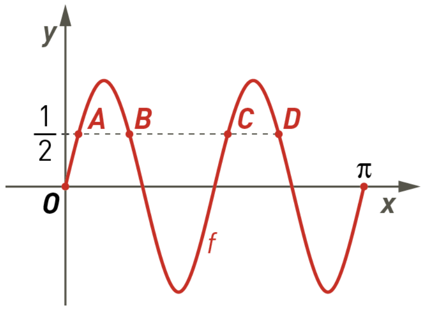
6.1. Determina k , no caso em que a área do retângulo é $0{,}25$.

6.2. Considera $k=2$.

a) Calcula $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, começando por mostrar que $f(x)=\ln\left(\dfrac{2x}{e^{2x}}\right)$.

b) Calcula $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

7. Na figura, em referencial o.n. *xOy*, está representada a função *f*, de domínio $[0,\pi]$, definida por:



$$f(x)=\sin(3x)\cos x+\cos(3x)\sin x$$

7.1. Calcula $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)}{x}$.

7.2. O gráfico da função *f* interseta a reta $y=\dfrac{1}{2}$ em quatro pontos: *A*, *B*, *C* e *D* tal como é indicado na figura.

Determina a distância entre *B* e *C*.

FIM (Caderno 2)

Cotações											
	Caderno 1 (com calculadora)										
Questões	1.	2.1.	2.2.a)	2.2.b)	3.1.	3.2.					
Pontos	15	15	10	15	15	10				**Total**	**80**
	Caderno 2 (sem calculadora)										
Questões	4.1.	4.2.	4.3.	5.	6.1.	6.2.a)	6.2.b)	7.1.	7.2.		
Pontos	15	15	10	15	15	13	10	12	15	**Total**	**120**
Total											**200**

FORMULÁRIO

GEOMETRIA

Comprimento de um arco de circunferência: αr
(α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;*
r – raio)

Áreas de figuras planas

Polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Setor circular: $\frac{\alpha r^2}{2}$

(α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$

(*r – raio da base; g – geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$

(*r – raio*)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ *(r – raio)*

PROGRESSÕES

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

TRIGONOMETRIA

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

COMPLEXOS

$(\rho \text{ cis } \theta)^n = \rho^n \text{ cis}(n\theta)$ ou $(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho \text{ cis } \theta} = \sqrt[n]{\rho} \text{ cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ ou $\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$

$(k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

PROBABILIDADES

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

REGRAS DE DERIVAÇÃO

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\sin u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

LIMITES NOTÁVEIS

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$