CADERNO 1

(É permitido o uso de calculadora gráfica)

1.

1.1. Algarismos ímpares: $1\,,3\,,5\,,7\,,9$

Algarismos pares: $2\,,4\,,6\,,8$

N.º de possibilidades para o algarismo das unidades: 5

N.º de sequências com os algarismos pares consecutivos: $4!$

N.º de possibilidades de representar os 4 algarismos ímpares e a sequência de pares: $5!$

$5\times 4!\times 5! = 14\,400$

Opção: (D) $14\,400$

1.2.
N.º de casos favoráveis a *X*: ${}^4C_1 \times {}^5C_1 + {}^4C_2 = 4\times 5+6 = 26$

N.º de casos favoráveis a $X\cap Y$: 3

$$P\left(Y|X\right)=\frac{3}{26}$$

Opção: (A) $\frac{3}{26}$

2. $f\left(x\right)=x+\log_3 x$

$$\text{t.m.v.}_{[3\,,5]}=\frac{f\left(5\right)-f\left(3\right)}{5-3}\approx 1{,}2$$

Opção: (B) $1{,}2$

3.

3.1. Tem-se $f\left(x\right)=\sqrt{e^{-2x}+x^2}$

Seja $y=mx+b$ a equação da assíntota ao gráfico de f quando $x\to+\infty$.

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f\left(x\right)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{e^{-2x}+x^2}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{e^{-2x}+x^2}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{e^{2x}x^2}+1} = \sqrt{0+1}=1$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{e^{-2x}+x^2}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{e^{-2x}+x^2}-x\right)\left(\sqrt{e^{-2x}+x^2}+x\right)}{\left(\sqrt{e^{-2x}+x^2}+x\right)}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-2x}+x^2-x^2}{\left(\sqrt{e^{-2x}+x^2}+x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-2x}}{\left(\sqrt{e^{-2x}+x^2}+x\right)}=\frac{0}{+\infty}=0$$

Resposta: A assíntota pode ser representada pela equação $y=x$.

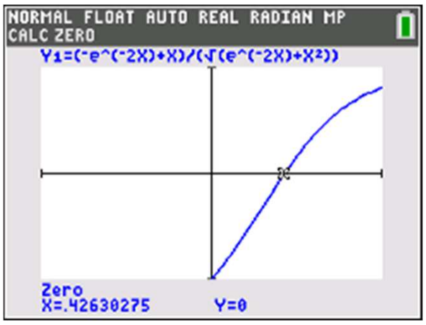
3.2. $$f'(x)=\frac{\left(e^{-2x}+x^2\right)'}{2\sqrt{e^{-2x}+x^2}}=\frac{-2e^{-2x}+2x}{2\sqrt{e^{-2x}+x^2}}=\frac{-e^{-2x}+x}{\sqrt{e^{-2x}+x^2}}$$

A função f', derivada de f, tem domínio $\mathbb{R}$ e é contínua, em particular, é contínua em [0 , 1].

$f'(0)=-1$ e $f'(1)=\dfrac{-\frac{1}{e^2}+1}{\sqrt{-\frac{1}{e^2}+1}}>0$. Então $f'(0)\times f'(1)<0$.

Pelo Corolário do teorema de Bolzano conclui-se que $\exists c\in\left]0,1\right[:\ f'(c)=0$, ou seja, a função f' tem um zero no intervalo $\left]0,1\right[$.

Introduzindo a expressão da função f' na calculadora gráfica, define-se uma janela adequada que permita a visualização do zero da função no intervalo $\left]0,1\right[$.

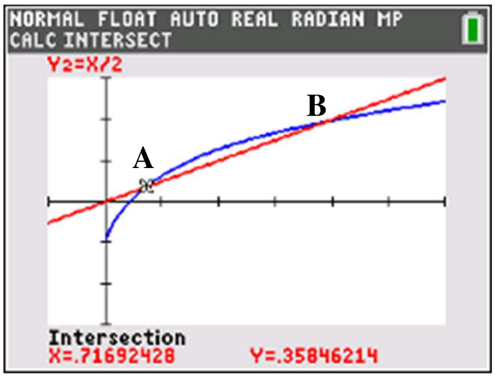


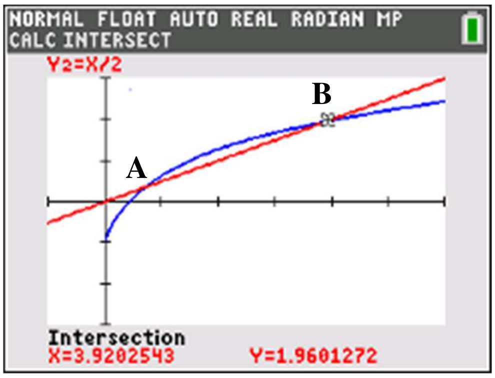
Resposta: O valor, arredondado às centésimas, do zero de f' é 0,42.

4. Os pontos do gráfico de f têm coordenadas $\left(x\ ,\ f(x)\right)$

As abcissas dos pontos A e B satisfazem a condição $f(x)=\frac{x}{2}$, ou seja, $\sqrt{x}-\mathrm{e}^{-x}=\frac{x}{2}$.

Para resolver graficamente esta equação, inserem-se na calculadora as expressões das funções f e g sendo $g(x)=\frac{x}{2}$.





$a\approx 0,717$

$b\approx 3,920$

Resposta: Conclui-se que $b-a\approx 3,2$.

CADERNO 2
(Não é permitido o uso de calculadora gráfica)

5. Sabe-se que $\lim\left(\frac{n-1}{n+2k}\right)^n=\sqrt{\mathrm{e}}\ ,\ k\in\mathbb{R}$

$$\lim\left(\frac{n-1}{n+2k}\right)^n=\lim\left(\frac{n\left(1-\frac{1}{n}\right)}{n\left(1+\frac{2k}{n}\right)}\right)^n=\lim\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{2k}{n}\right)^n}=\frac{\mathrm{e}^{-1}}{\mathrm{e}^{2k}}=\mathrm{e}^{-1-2k}$$

Tem-se: $\mathrm{e}^{-1-2k}=\sqrt{\mathrm{e}}\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-1-2k}=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\Leftrightarrow -1-2k=\frac{1}{2}\Leftrightarrow k=-\frac{3}{4}$

Opção: **(B)** $-\frac{3}{4}$

6.

6.1. Como a função f tem domínio $\mathbb{R}$ e é contínua, não admite assíntotas verticais.
Seja $y = mx + b$ a equação de uma assíntota ao gráfico de f quando $x \to +\infty$.

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{5x-1}{e^x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(5-\frac{1}{x}\right)}{xe^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{5-\frac{1}{x}}{e^x} = \frac{5}{+\infty} = 0$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{5-\frac{1}{x}}{\frac{e^x}{x}} \right) = \frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(5-\frac{1}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x}\right)} = \frac{5}{+\infty} = 0$$

Quando $x \to +\infty$, o gráfico de f admite a assíntota de equação $y = 0$.

Quando $x \to -\infty$ tem-se: $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\frac{5x-1}{e^x}}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5-\frac{1}{x}}{e^x} = \dfrac{5}{0^+} = +\infty$.

Daqui se conclui que o gráfico de f não admite assíntota quando $x \to -\infty$.

Resposta: A única assíntota é a reta de equação $y = 0$.

6.2. $f'(x) = \left(\dfrac{5x-1}{e^x}\right)' = \dfrac{5e^x - e^x(5x-1)}{\left(e^x\right)^2} = \dfrac{e^x(5-5x+1)}{\left(e^x\right)^2} =$

$= \dfrac{6-5x}{e^x}$

x	$-\infty$	$\frac{6}{5}$	$+\infty$
$6-5x$	$+$	0	$-$
e^x	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{6-5x}{e^x} = 0 \Leftrightarrow 6-5x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{6}{5}$

Então, $a = \dfrac{6}{5}$.

$$f''(x) = \left(\frac{6-5x}{e^x}\right)' = \frac{-5e^x - e^x(6-5x)}{\left(e^x\right)^2} = \frac{e^x(-5-6+5x)}{\left(e^x\right)^2} = \frac{5x-11}{e^x}$$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{5x-11}{e^x} = 0 \Leftrightarrow 5x-11 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{11}{5}$

x	$-\infty$	$\frac{11}{5}$	$+\infty$
$5x-11$	$-$	0	$+$
e^x	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
f	$\cap$	P. Inf.	$\cup$

Então, $b = \dfrac{11}{5}$.

$b - a = \dfrac{11}{5} - \dfrac{6}{5} = 1$. Seja d a medida das diagonais de um quadrado de lado 1.

$d^2 = 1 + 1$, ou seja, $d = \sqrt{2}$.

Resposta: A medida das diagonais de um quadrado de lado 1 é $\sqrt{2}$.

7. $\log_2(4a)=\dfrac{2}{3} \Leftrightarrow \log_2 4+\log_2 a=\dfrac{2}{3} \Leftrightarrow \log_2\left(2^2\right)+\log_2 a=\dfrac{2}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2+\log_2 a=\dfrac{2}{3} \Leftrightarrow \log_2 a=-\dfrac{4}{3}$

$$\log_2\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)=\log_2 1-\log_2\left(a^{\frac{1}{2}}\right) = -\frac{1}{2}\log_2(a)=-\frac{1}{2}\times\left(-\frac{4}{3}\right)=\frac{2}{3}$$

Opção: (A) $\dfrac{2}{3}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{kx}-2+e^x}{x}=\dfrac{5}{2} \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{kx}-1-1+e^x}{x}=\dfrac{5}{2} \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{kx}-1}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=\dfrac{5}{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ kx\to 0}}\dfrac{k\left(e^{kx}-1\right)}{kx}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=\dfrac{5}{2} \Leftrightarrow k+1=\dfrac{5}{2} \Leftrightarrow k=\dfrac{3}{2}$

Opção: (C) $\dfrac{3}{2}$

9. $f(x)=x\ln\left(\dfrac{3}{x}\right)$

$$f'(x)=\ln\left(\frac{3}{x}\right)+x\,\frac{-\frac{3}{x^2}}{\frac{3}{x}} = \ln\left(\frac{3}{x}\right)-1$$

Sejam m_r e m_s os declives, respetivamente, de *r* e de *s*.

$$m_r=f'\left(\frac{3}{e^3}\right)=\ln\left(\frac{3}{\frac{3}{e^3}}\right)-1 = \ln\left(e^3\right)-1=3-1=2$$

Então, $m_s=-\dfrac{1}{2}$. A abcissa de *B* é solução da equação $f'(x)=-\dfrac{1}{2}$.

$$\ln\left(\frac{3}{x}\right)-1=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{3}{x}\right)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{3}{x}=e^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x=\frac{3}{\sqrt{e}} \Leftrightarrow x=\frac{3\sqrt{e}}{e}$$

$$f\left(\frac{3}{\sqrt{e}}\right)=\frac{3}{\sqrt{e}}\ln\left(\frac{3}{\frac{3}{\sqrt{e}}}\right)=\frac{3}{\sqrt{e}}\ln\left(\sqrt{e}\right)=\frac{3}{\sqrt{e}}\ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right)=\frac{3}{2\sqrt{e}}=\frac{3\sqrt{e}}{2e}$$

Resposta: As coordenadas do ponto *B* são $\left(\frac{3\sqrt{e}}{e}, \frac{3\sqrt{e}}{2e}\right)$.

10.1. $P\left(x, f\left(x\right)\right)$.

Sabe-se que as coordenadas do ponto *P* satisfazem a condição $f\left(x\right)=2x$.

$f\left(x\right)=2x \Leftrightarrow xe^{-x}=2x \Leftrightarrow x\left(e^{-x}-2\right)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee e^{-x}=2 \Leftrightarrow x=0 \vee -x=\ln 2$

$\Leftrightarrow x=0 \vee x=-\ln 2$

Como as coordenadas de *P* são não nulas tem-se que a abcissa é igual a $-\ln 2$.

O declive da reta tangente ao gráfico no ponto *P* é igual a $f'\left(-\ln 2\right)$.

$f'\left(x\right)=\left(xe^{-x}\right)'=e^{-x}-xe^{-x}$

$f'\left(-\ln 2\right)=e^{\ln 2}+\ln\left(2\right)\times e^{\ln 2}=2+2\ln\left(2\right)=2+\ln 4$.

Resposta: O declive da reta tangente ao gráfico de *f* no ponto *P* é igual a $2+\ln 4$.

10.2. Seja x a abcissa comum aos pontos *A* e *B*.

As ordenadas dos pontos *A* e *B* são simétricas.

Assim, tem-se: $f''\left(x\right)=-f\left(x\right)$

$f'\left(x\right)=\left(xe^{-x}\right)'=e^{-x}-xe^{-x}$

$f''\left(x\right)=\left(e^{-x}-xe^{-x}\right)'=-e^{-x}-e^{-x}+xe^{-x}=-2e^{-x}+xe^{-x}$

$f''\left(x\right)=-f\left(x\right)\Leftrightarrow -2e^{-x}+xe^{-x}=-xe^{-x}\Leftrightarrow -2e^{-x}+2xe^{-x}=0$

$2e^{-x}\left(x-1\right)=0\Leftrightarrow x=1$

Assim, tem-se:

$$A\left(1, f(1)\right) = \left(1,\ \mathrm{e}^{-1}\right) = \left(1,\ \frac{1}{\mathrm{e}}\right)$$

$$B\left(1, f''(1)\right) = \left(1, -2\mathrm{e}^{-1} + \mathrm{e}^{-1}\right) = \left(1, -\mathrm{e}^{-1}\right) = \left(1, -\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$$

Resposta: $A\left(1, \frac{1}{\mathrm{e}}\right)$ e $B\left(1, -\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$

11. Sabe-se que:

- $\forall x \in \mathbb{R},\quad f'(x) < 0$
- $f(2) = 0$
- $g(x) = e^{f(x)} - f(x)$

$$g'(x) < 0 \Leftrightarrow \left(\mathrm{e}^{f(x)} - f(x)\right)' < 0 \Leftrightarrow f'(x)\mathrm{e}^{f(x)} - f'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(x)\left(\mathrm{e}^{f(x)} - 1\right) < 0$$

Cálculo auxiliar

$$\mathrm{e}^{f(x)} - 1 = 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{f(x)} = 1 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$
$\mathrm{e}^{f(x)} - 1$	$+$	0	$-$
$g'(x)$	$-$	0	$+$

$$g'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty, 2\right[$$

Resposta: $x \in \left]-\infty, 2\right[$

FORMULÁRIO

GEOMETRIA

Comprimento de um arco de circunferência: αr
(α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio)*

Áreas de figuras planas

Polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Setor circular: $\frac{\alpha r^2}{2}$

(α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$
(r – *raio da base;* g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$
(r – *raio*)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – *raio*)

PROGRESSÕES

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

TRIGONOMETRIA

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

COMPLEXOS

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$ ou $(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ ou $\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$

$(k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

PROBABILIDADES

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

REGRAS DE DERIVAÇÃO

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\sin u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

LIMITES NOTÁVEIS

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$