## CADERNO 1
## (É permitido o uso de calculadora gráfica)

**1.**

**1.1.** De 1 a 50 há dez números que são múltiplos de 5:

$\{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50\}$

O número total de sequências de 5 elementos sem qualquer restrição é dado por:
${}^{50}A_5 = 254\ 251\ 200$

O número total de sequências de 5 elementos sem qualquer múltiplo de 5 é dado por:
${}^{40}A_5 = 78960960$

Assim, o número de sequências com pelo menos um múltiplo de 5 é dado por:
$254\ 251\ 200 - 78\ 960\ 960 = 175\ 290\ 240$

**Resposta:** Há 175 290 240 sequências diferentes com pelo menos um múltiplo de 5.

**1.2.** Ter no máximo dois números de um só algarismo, significa não ter números de um só algarismo, ou ter exatamente um ou ter exatamente dois.

De 1 a 50 há nove números de um só algarismo e os restantes 41 têm mais de um algarismo.

Assim, tem-se:

$${}^{41}A_5 + {}^{9}C_1 \times {}^{41}C_4 \times 5! + {}^{9}C_2 \times {}^{41}C_3 \times 5! =$$

$$= 8\ 9927\ 760 + 2\ 624\ 918\ 400 + 276\ 307\ 200 = 2\ 991\ 153\ 360$$

**Resposta:** Há 2 991 153 360 sequências diferentes, no máximo, com dois números de um algarismo.

**2.** Se os frascos fossem todos diferentes o número de sequências era dado por 8!.

Como há três frascos iguais o número de sequências é dado por:

$$\frac{8!}{3!} = \frac{3! \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8}{3!} = 6720$$

**Resposta:** Opção correta **(A) 6720**

**3.** De uma linha do Triângulo de Pascal composta por ${}^{n}C_p$ , com $p \in \{0 , 1 , \dots , n\}$ , sabe-se que:

- *n* é ímpar;
- o maior número observado é 1716;
- a soma de todos os elementos dessa linha menores que 1716 é igual 4760.

Sendo $n$ ímpar o número de elementos é par, sendo os dois elementos centrais os maiores e iguais a 1716.

A soma de todos os elementos dessa linha é igual a: $4760 + 2 \times 1716$, ou seja, 8192.

Mas, sabe-se que a soma de todos os elementos da linha é dada por $2^n$.

Assim, tem-se: $2^n = 8192$.

Como $8192 = 2^{13}$, resulta que $n = 13$.

Conclui-se que a linha é constituída por 14 elementos.

**Resposta:** O número de elementos dessa linha é 14.

**4.**

**4.1.** Para a sequência de números há ${}^{10}A_5 = 30\,240$ possibilidades.

Para as sequências de letras, o número de possibilidades é dado por:

$${}^{5}C_1 \times 3 \times {}^{21}A'_2 = 15 \times 21^2 = 6615$$

No total há ${}^{10}A_5 \times 6615 = 30\,240 \times 6615 = 200\,037\,600$ possibilidades.

**Resposta**: Há 200 037 600 matrículas diferentes nas condições indicadas.

**4.2.** Quantas são as matrículas que satisfazem as seguintes condições:

- tem exatamente dois zeros, sendo os restantes algarismos diferentes;
- a soma dos algarismos é um número par;
- as três letras são vogais diferentes.

Número de posições diferentes que os dois zeros podem ocupar na sequência de 5 elementos:
${}^{5}C_2 = 10$

Número de sequências de três vogais diferentes: ${}^{5}A_3 = 60$

Se a soma dos cinco elementos é um número par significa que os outros três elementos da sequência podem ser três números pares ou dois números ímpar e um par:

Assim, o número pedido é dado por: ${}^{10}C_2 \times \left( {}^{4}A_3 + {}^{4}C_2 \times {}^{5}C_1 \times 3! \right) \times {}^{5}A_3$

$${}^{10}C_2 \times \left( {}^{4}A_3 + {}^{4}C_2 \times {}^{5}C_1 \times 3! \right) \times {}^{5}A_3 = 10 \times (24 + 6 \times 5 \times 6) \times 60 = 10 \times 204 \times 60 = 122\,400$$

**Resposta:** Há 122 400 matrículas nas condições indicadas.

**4.3.** Para o número ser maior que 30 000 e capicua, o algarismo das dezenas de milhar tem sete possibilidades (ou 3, ou 4, ou 5, ou 6, ou 7, ou 8, ou 9), o algarismo das unidades tem uma possibilidade que é ser igual ao das dezenas de milhar. O algarismo dos milhares pode ser qualquer algarismo, tem 10 possibilidades e o das dezenas tem uma possibilidade. O algarismo das centenas tem 10 possibilidades

$$\underline{7} \times \underline{10} \times \underline{10} \times \underline{1} \times \underline{1}$$

Número de casos favoráveis: $7 \times 10^2 = 700$

Número de casos possíveis: ${}^{10}A'_5 = 10^5 = 10\,000$

Aplicando a Lei de Laplace a probabilidade pedida é dada por $\frac{700}{10\,000} = 0{,}07$, ou seja, 7%.

**Resposta:** A probabilidade pedida é 7%.

## FIM (Caderno 1)

| Cotações | | | | | | | | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Questões - Caderno 1** | **1.1.** | **1.2.** | **2.** | **3.** | **4.1.** | **4.2.** | **4.3.** | |
| **Pontos** | 15 | 15 | 8 | 15 | 12 | 15 | 15 | **95** |

## CADERNO 2
## (Não é permitido o uso de calculadora)

**1.** $A = \{x \in \mathbb{Z} : \ |x-1| \leq 3\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} : \ 7 - 3x \geq -8\}$

$|x-1| \leq 3 \Leftrightarrow x - 1 \leq 3 \wedge x - 1 \geq -3 \Leftrightarrow x \leq 4 \wedge x \geq -2$

$A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

$7 - 3x \geq -8 \Leftrightarrow -3x \geq -15 \Leftrightarrow x \leq 5$

$B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$B \backslash A = \{x : \ x \in B \wedge x \notin A\} = \{5\}$

$\#(B \backslash A) = 1$

**Resposta:** Opção correta **(A) 1**

**2.** $\#(A \times A \times A) = n \times n \times n = n^3$
A resposta é um cubo perfeito.
Das opções apresentadas o único cubo perfeito é 27.

**Resposta:** Opção correta **(B) 27**

**3.** $P(A \cap B) = 1 - P(\overline{A \cap B}) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$

$P(B \cap \bar{A}) = P(B \backslash A) = P(B) - P(A \cap B) = 0{,}45$

Sendo $P(B) - P(A \cap B) = 0{,}45$

Sabe-se que: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}8$ ; $P(B) - P(A \cap B) = 0{,}45$

Então, $P(A) + 0{,}45 = 0{,}8$, ou seja, $P(A) = 0{,}35$ .

**Resposta:** $P(A) = 0{,}35$

**4.** ${}^nC_{n-1} = \frac{{}^nC_2}{4} \Leftrightarrow {}^nC_1 = \frac{{}^nC_2}{4} \Leftrightarrow n = \frac{n!}{2!(n-2)! \times 4} \Leftrightarrow n = \frac{n(n-1)}{8}$

$$\Leftrightarrow 8n = n^2 - n \Leftrightarrow n^2 - 9n = 0 \Leftrightarrow n = 0 \vee n = 9$$

No contexto, a solução é $n = 9$. A soma de todos os elementos dessa linha do Triângulo de Pascal é $2^9 = 512$ .

**Resposta:** A opção correta é **(A) 512**.

**5.**

$\left(\frac{1}{x^2}-x\right)^{12} = \sum_{k=0}^{12}\left({}^{12}C_k \times (x^{-2})^{12-k} \times (-x)^k\right) = \sum_{k=0}^{12}\left({}^{12}C_k \times x^{-24+3k} \times (-1)^k\right)$

O termo independente de $x$ resulta quando $-24+3k=0$, ou seja, $k=8$ .

Se $k=8$, o termo independente de $x$ é igual a ${}^{12}C_8$.

**Resposta:** $n=12$ e $k=8$ .

**6.**

**6.1.** Pretende-se determinar a probabilidade de sair uma bola com número múltiplo de 3, sabendo que o resultado é uma bola não azul, ou seja vermelha.

$A=\{A3\,,\ V6\,, A9\,, V12\}$ ; $B=\{A1\,, A3\,, A5\,, A7\,, A9\,, A11\}$

Assim, os casos possíveis são: $\bar{B}=\{V2\,, V4\,, V6\,, V8\,, V10\,, V12\}$

$\#\bar{B}=6$
Os casos favoráveis são: $A=\{A3\,,\ V6\,,\ A9\,,\ V12\}$

$\#A=4$

Aplicando a Lei de Laplace, tem-se: $P(A|\bar{B})=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

**Resposta:** $P(A|\bar{B})=\frac{2}{3}$

**6.2.** Sabe-se que: $P(D|C)=\frac{P(D\cap C)}{P(C)}$

Daqui resulta que $P(D\cap C)=P(D|C)\times P(C)$ .

Se a primeira bola extraída é vermelha, ou seja, com número par, então a segunda extração terá de ser vermelha para que a soma dos números das bolas extraídas seja número par.

Assim, tem-se $P(D|C)=\frac{5}{11}$ e $P(C)=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$

Então, $P(D\cap C)=P(D|C)\times P(C)=\frac{5}{11}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{22}$.

**Resposta:** $P(D\cap C)=\frac{5}{22}$

**7.**

**7.1.** O número de arestas do prisma é dado por: $3n$
O número de vértice do prisma é dado por: $2n$
Número de casos favoráveis é dado por: $3n$
Número de casos possíveis é dado por: ${}^{2n}C_2$
A probabilidade pedida é dada por: $\frac{3n}{{}^{2n}C_2}$

**Resposta**: A opção correta é **(C)** $\frac{3n}{{}^{2n}C_2}$ .

**7.2. Resposta A:** ${}^{2n}C_3 - 2 \times {}^{n}C_3$ e **Resposta B:** $2n \times {}^{n}C_2$

A resposta A corresponde ao seguinte raciocício.

Começa-se por representar o número total de escolhas de três vértices que é representado por ${}^{2n}C_3$ .

De seguida, determina-se o número total de escolhas dos três vértices pertencentes a uma das bases do prisma que é dado por: ${}^{n}C_3$

Como o prisma tem duas bases, o número total de escolhas em que os três vértices pertencem à mesma base é dado por $2 \times {}^{n}C_3$.

Assim, o número total de maneiras de escolher os três vértices de modo que não pertençam todos à mesma base do prisma é dado por ${}^{2n}C_3 - 2 \times {}^{n}C_3$ .

A resposta B corresponde ao seguinte raciocínio:

Escolhe um vértice de uma base e os outros dois da outra base.

Assim, tem-se: ${}^{n}C_1 \times {}^{n}C_2 + {}^{n}C_1 \times {}^{n}C_2$

Como, ${}^{n}C_1 = n$, resulta que ${}^{n}C_1 \times {}^{n}C_2 + {}^{n}C_1 \times {}^{n}C_2 = n \times {}^{n}C_2 + n \times {}^{n}C_2 = 2n \times {}^{n}C_2$ .

Assim, o número total de maneiras de escolher os três vértices de modo que não pertençam todos à mesma base do prisma é dado por $2n \times {}^{n}C_2$ .

| Cotações | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Caderno 1 (com calculadora) | | | | | | | | | | |
| **Questões** | **1.1.** | **1.2.** | **2.** | **3.** | **4.1.** | **4.2.** | **4.3.** | | | | |
| **Pontos** | 15 | 15 | 8 | 15 | 12 | 15 | 15 | **Total** | | | **95** |
| | Caderno 2 (sem calculadora) | | | | | | | | | | |
| **Questões** | **1.** | **2.** | **3.** | **4.** | **5.** | **6.1.** | **6.2.** | **7.1.** | **7.2.** | | |
| **Pontos** | 8 | 8 | 15 | 8 | 12 | 15 | 15 | 8 | 16 | **Total** | **105** |
| **Total** | | | | | | | | | | | **200** |