Novo Espaço – Matemática A 12.º ano

Proposta de Teste [outubro - 2017]

Nome: ____

Ano / Turma: _________ **N.º:** _____ **Data:** ___ / ____ / ___

- Não é permitido o uso de corretor. Deves riscar aquilo que pretendes que não seja classificado.
- A prova inclui um formulário.
- As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

CADERNO 1
(É permitido o uso de calculadora gráfica)

1. Numa tômbola há cinquenta bolas numeradas de 1 a 50.
Num sorteio são retiradas sucessivamente, sem reposição, cinco bolas formando uma sequência de cinco números.

1.1. Quantas sequências diferentes há com pelo menos um múltiplo de 5?

1.2. Qual é o número de sequências, tendo, no máximo, dois números de um só algarismo?

2. Na montra de uma perfumaria vão ser expostos, lado a lado, oito frascos de perfume, sendo três deles iguais entre si e os restantes todos diferentes.

Quantas sequências se podem formar, atendendo ao tipo de frasco?

Indica a opção correta.

(A) 6720 **(B)** 720 **(C)** 120 **(D)** $40\,320$

3. De uma linha do Triângulo de Pascal composta por ${}^{n}C_{p}$, com $p \in \{0\,,1\,,\ldots,n\}$, sabe-se que:

- *n* é ímpar;
- o maior número observado é 1716;
- a soma de todos os elementos dessa linha menores que 1716 é igual 4760.

Determina o número de termos dessa linha.

4. O sistema de matrículas de automóveis, num dado país, é constituído por uma sequência de cinco algarismos seguida de uma sequência de três letras, tal como é sugerido na figura.
Considera o alfabeto com 26 letras.

4.1. Determina o número de matrículas diferentes sem algarismos repetidos e com exatamente uma e uma só vogal.

4.2. Quantas são as matrículas que satisfazem as seguintes condições:

- tem exatamente dois zeros, sendo os restantes algarismos diferentes;
- a soma dos algarismos é um número par;
- as três letras são vogais diferentes.

4.3. Um computador gera, de forma aleatória, uma matrícula do sistema.

Qual é a probabilidade de obter uma matrícula em que a sequência de algarismos represente um número maior que 30 000 e que seja uma capicua?

Apresenta o resultado em percentagem.

Nota: Um número diz-se capicua quando se lê de igual forma da esquerda para a direita e da direita para a esquerda.

FIM (Caderno 1)

Cotações								Total
Questões - Caderno 1	**1.1.**	**1.2.**	**2.**	**3.**	**4.1.**	**4.2.**	**4.3.**	
Pontos	15	15	8	15	12	15	15	**95**

CADERNO 2
(Não é permitido o uso de calculadora)

1. Considera os conjuntos:

$A = \{x \in \mathbb{Z} : \ |x-1| \leq 3\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} : \ 7 - 3x \geq -8\}$

Qual dos seguintes números representa $\#\,(B \backslash A)$?

Indica a opção correta.

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 35 **(D)** 4

2. Dado um conjunto A, sabe-se que $\#A = n$, com $n \in \mathbb{N}_0$.
Qual dos seguintes números pode ser igual a $\#(A \times A \times A)$?

(A) 15 **(B)** 27 **(C)** 9 **(D)** 21

3. Sejam A e B dois acontecimentos associados à mesma experiência aleatória.

Determina $P(A)$ sabendo que:

- $P(B \cap \overline{A}) = 0{,}45$
- $P(A \cup B) = 0{,}8$
- $P(\overline{A \cap B}) = 0{,}7$

4. Numa certa linha do Triângulo de Pascal, o penúltimo elemento é a quarta parte do terceiro. Qual é a soma de todos os elementos dessa linha?

Indica a opção correta.

(A) 512 **(B)** 32 **(C)** 1024 **(D)** 10

5. No desenvolvimento da expressão $\left(\frac{1}{x^2} - x\right)^{12}$, pelo Binómio de Newton, há um termo independente de x. Esse termo pode ser representado na forma ${}^{n}C_k$.

Determina os valores de n e de k.

6. Num saco foram colocadas 12 bolas, indistinguíveis ao tato, numeradas de 1 a 12.

As bolas com número ímpar são azuis e as bolas com número par são vermelhas.

6.1. Ao acaso, retira-se uma bola do saco e verifica-se a cor e o número.

Seja *A* e *B* os acontecimentos:

A: "a bola retirada tem número múltiplo de 3"

B: "a bola retirada é azul"

Determina o valor de $P\left(A\middle|\overline{B}\right)$, sem aplicar a fórmula de probabilidade condicionada.

Na resposta deves indicar:

- o significado de $P\left(A\middle|\overline{B}\right)$;
- os casos possíveis;
- os casos favoráveis;
- o resultado na forma de fração irredutível.

6.2. Retomando o saco com as 12 bolas, ao acaso, extraem-se sucessivamente duas bolas, sem reposição, observando-se o número e a cor de cada uma delas.

Sejam *C* e *D* os acontecimentos:

C: "a primeira bola extraída é vermelha"

D: "a soma dos números das duas bolas retiradas é par"

Determina $P(C \cap D)$. Apresenta o resultado na forma de fração irredutível.

7. Considera um prisma reto com *n* arestas laterais, com $n \geq 5$, tendo sido identificado cada vértice por uma letra.

7.1. Do conjunto dos vértices do prisma foram escolhidos dois ao acaso. A probabilidade de os vértices escolhidos definirem uma reta que contenha uma aresta do prisma é dada por:

(A) $\frac{3n}{{}^{n}A_2}$ **(B)** $\frac{n}{{}^{n}C_2}$ **(C)** $\frac{3n}{{}^{2n}C_2}$ **(D)** $\frac{3n}{{}^{n}A_2}$

7.2. Do conjunto dos vértices do prisma vão ser escolhidos três. Quantas escolhas diferentes podem ser feitas de modo que os três vértices não pertençam todos à mesma base do prisma?

A seguir são apresentadas duas respostas corretas:

Resposta A: ${}^{2n}C_3 - 2 \times {}^{n}C_3$

Resposta B: $2n \times {}^{n}C_2$

Numa composição matemática explica o raciocínio associado a cada resposta, explicitando com clareza o siginificado, no contexto, de ${}^{2n}C_3$ e de $2 \times {}^{n}C_3$, na resposta *A* e de $2n \times {}^{n}C_2$, na resposta *B*.

FIM (Caderno 2)

Cotações											
	Caderno 1 (com calculadora)										
Questões	**1.1.**	**1.2.**	**2.**	**3.**	**4.1.**	**4.2.**	**4.3.**				
Pontos	15	15	8	15	12	15	15			**Total**	**95**
	Caderno 2 (sem calculadora)										
Questões	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.1.**	**6.2.**	**7.1.**	**7.2.**		
Pontos	8	8	15	8	12	15	15	8	16	**Total**	**105**
Total											**200**

FORMULÁRIO

GEOMETRIA

Comprimento de um arco de circunferência: αr
(α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio)*

Áreas de figuras planas

Polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Setor circular: $\frac{\alpha r^2}{2}$
(α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$
(r – *raio da base;* g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$
(r – *raio*)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – *raio*)

PROGRESSÕES

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$

TRIGONOMETRIA

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

COMPLEXOS

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$ ou $(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ ou $\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$

$(k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

PROBABILIDADES

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

REGRAS DE DERIVAÇÃO

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\sin u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

LIMITES NOTÁVEIS

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$