CADERNO 1
(É permitido o uso de calculadora gráfica)

1. $u_2 = 6 \Leftrightarrow a^2 - a = 6 \Leftrightarrow a^2 - a - 6 = 0 \Leftrightarrow a = 3 \vee a = -2$.
Como $a > 0$, conclui-se que $a = 3$.

$u_{12} = 265722 \Leftrightarrow 3u_n - 3 = 265722 \Leftrightarrow 3u_n = 265725 \Leftrightarrow u_n = 88575$

Resposta: Opção correta **(B)** 88575

2.

2.1. Relativamente à sucessão (u_n) tem-se:

- $u_1 = 1 + 3v_1 = 10$;
- $u_2 = 4 + 3v_2 = 7$;
- $\lim(3 - v_n) = 3 - (-\infty) = +\infty$

Como $u_1 > u_2$ e $\lim(u_n) = +\infty$, conclui-se que a sucessão (u_n) é não monótona.

Resposta: A sucessão (u_n) é não monótona.

2.2. Sabe-se que: $-1 \leq \sin(n) \leq 1$

Como $\lim(u_n) = +\infty$, a partir de uma certa ordem, $-\frac{1}{u_n} \leq \sin(n) \leq \frac{1}{u_n}$.

Como $\lim\left(-\frac{1}{u_n}\right) = \lim\left(\frac{1}{u_n}\right) = 0$, pelo Teorema das sucessões enquadradas conclui-se que $\lim \frac{\sin n}{u_n} = 0$.

Resposta: $\lim \frac{\sin n}{u_n} = 0$

3. Sendo $f(x) = x^4 - 3x^2 - x + 1$, tem-se $f(1) = -2$ e $f(2) = 3$.

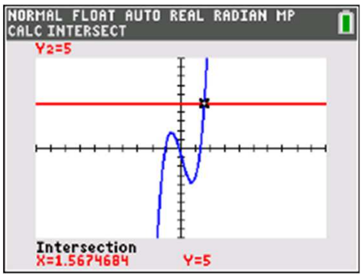
O declive da reta definida pelos pontos $A(1, -2)$ e $A(2, 3)$ é dado por:

$$m = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{3 + 2}{1} = 5$$

Como f é uma função polinomial, é contínua e diferenciável em $\mathbb{R}$, em particular é contínua em [1, 2] e diferenciável em]1, 2[.

Pelo Teorema de Lagrange, $\exists c \in \left]a,b\right[: \; f'(c)=5$.

A reta de declive 5 que passa pelo ponto de abcissa c é tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa c.



$f'(x)=4x^3-6x-1$

Resolvendo graficamente a equação $f'(c)=5$ obtém-se:

$c \approx 1,57$

Resposta: $c \approx 1,57$

4. Considera os acontecimentos:

***C*:** "O computador é atribuído a um aluno que vive na cidade."

***M*:** "O computador é atribuído a um aluno do sexo masculino."

***F*:** "O computador é atribuído a um aluno do sexo feminino."

Sabe-se que:

- $P(M)=0,6$
- $P(C)=0,75$
- $P(F \mid C)=0,3$

4.1. $P(C \cap F)=0,3 \times 0,75=0,225$

Resposta: Opção correta **(D)** **0,225**

4.2. $P(M \mid C)=1-0,3=0,7$

$$P(C \mid M)=\frac{P(C \cap M)}{P(M)} = \frac{0,75 \times 0,7}{0,6}=0,875$$

Resposta: A probabilidade de o premiado viver na cidade, sabendo que é rapaz é de 0,875.

FIM (Caderno 1)

Cotações							Total
Questões - Caderno 1	1.	2.1.	2.2.	3.	4.1.	4.2.	
Pontos	15	10	10	15	15	15	80

CADERNO 2
(Não é permitido o uso de calculadora)

5. $\lim(x_n) = \lim \frac{2}{\sqrt{n}} = \frac{2}{+\infty} = 0$

$\lim f(x_n) = \lim \frac{x_n}{|x_n - 3|} = \frac{0}{3} = 0$

Resposta: Opção correta **(C) 0**

6.

6.1. $\lim\limits_{x\to -1} \frac{[f(x)-f(-1)]\times g(x)}{x^2-1}$ = $\lim\limits_{x\to -1} \frac{[f(x)-f(-1)]\times g(x)}{(x+1)(x-1)}$ =

$\lim\limits_{x\to -1} \frac{[f(x)-f(-1)]}{x+1} \times \lim\limits_{x\to -1} \frac{g(x)}{x-1}$ = $f'(-1)\times \lim\limits_{x\to -1} \frac{g(x)}{x-1}$ = $\frac{1-(-1)^2}{\left((-1)^2+1\right)^2} \times \lim\limits_{x\to -1} \frac{x}{(1-x)(x-1)}$ =

$\frac{0}{4}\times\left(\frac{-1}{-4}\right) = 0$

Resposta: $\lim\limits_{x\to -1} \frac{[f(x)-f(-1)]\times g(x)}{x^2-1} = 0$

6.2. Como a função *f* admite derivada finita em todos os pontos do domínio, em particular em [–1, 2], a função é contínua em [–1, 2].

$f(-1) = g(-1) = -\frac{1}{2}$ e $f(2) = g(2) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$

Como $-\frac{1}{2} < 0,1 < \frac{2}{5}$, pelo Teorema de Bolzano, $\exists c \in \left]-1, 2\right[:\ f(c) = 0,1$.

Logo, a equação $f(x) = 0,1$ é possível em]–1, 2[.

6.3. Sendo $g(-1) = -\frac{1}{2}$ e $g(2) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$, verifica-se que $-\frac{1}{2} < 0,1 < \frac{2}{5}$ e $g(-1)\times g(2) < 0$.

Como $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{10-x}{10x} = \frac{10}{0^+} = +\infty$, a função *g* não é contínua em [–1, 2], logo o Teorema de Bolzano-Cauchy não é aplicável neste intervalo.

Resposta: Não é possível garantir que $g(x) = 0,1$ é possível através do Teorema de Bolzano-Cauchy.

7.

7.1. $f'(x)=3\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2\times\dfrac{x+1-x}{(x+1)^2}=\dfrac{3x^2}{(x+1)^4}$, como queríamos demonstrar.

7.2. $f(1)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{1}{8}$

Seja $y=mx+b$ a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1.

$m=f'(1)=\dfrac{3}{16}$. Então, tem-se $y-\dfrac{1}{8}=\dfrac{3}{16}(x-1)\Leftrightarrow y=\dfrac{3x}{16}-\dfrac{3}{16}+\dfrac{1}{8}\Leftrightarrow y=\dfrac{3x}{16}-\dfrac{1}{16}$

Resposta: $y=\dfrac{3x}{16}-\dfrac{1}{16}$

7.3. Sabendo que $f''(x)=\dfrac{6x(1-x)}{(x+1)^5}$, podemos fazer o estudo de sinais de f''.

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
$6x$	$-$		$-$	0	$+$	$+$	$+$
$1-x$	$+$		$+$	$+$	$+$	0	$-$
$(x+1)^5$	$-$		$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$		$-$	0	$+$	0	$-$

Por observação da tabela identifica-se $x_A=0$ e $x_B=1$, abcissas dos pontos de inflexão do gráfico de f.

$\forall x\in\,]0,1[\,,\ f''(x)>0$

8.

8.1. $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{x}\right)=0+\dfrac{2}{0^+}=+\infty$

Resposta: Uma equação da assíntota vertical do gráfico de f é $x=0$.

8.2. $f'(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{x^2}=\dfrac{x^2-4}{2x^2}$

$f'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{x^2-4}{2x^2}=0\Leftrightarrow(x-2)(x+2)=0\ \wedge\ x>0\Leftrightarrow$

$(x=2\ \vee\ x=-2)\ \wedge\ x>0\Leftrightarrow x=2$

x	0		2	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
f		$\searrow$	2	$\nearrow$

$f(2)$ é mínimo da função. Tem-se $f(2)=2$, ou seja $C(2,2)$.

$\overline{OC} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$.

Equação da circunferência de centro C e que passa na origem: $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 8$

Resposta: $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 8$

8.3. Seja $A\hat{O}B = \alpha$ e $y = mx + b$ a equação reduzida da reta AB.

$$\tan\alpha = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = 2$$

$m = \tan(180 - \alpha) = -\tan\alpha = -2$

Assim, $f'(x) = -2 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-4}{2x^2} = -2 \Leftrightarrow \dfrac{x^2 - 4 + 4x^2}{2x^2} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{5x^2-4}{2x^2} = 0$.

Tem-se: $\left(x = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \vee x = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right) \wedge x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

$f\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right) = \dfrac{\frac{2\sqrt{5}}{5}}{2} + \dfrac{2}{\frac{2\sqrt{5}}{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5} + \dfrac{5\sqrt{5}}{5} = \dfrac{6\sqrt{5}}{5}$. O ponto P tem coordenadas $\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{5}, \dfrac{6\sqrt{5}}{5}\right)$.

Resposta: $P\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{5}, \dfrac{6\sqrt{5}}{5}\right)$

FIM (Caderno 2)

Cotações												
Caderno 1 (com calculadora)												
Questões	1.	2.1.	2.2.	3.	4.1.	4.2.						
Pontos	15	10	10	15	15	15					Total	80
Caderno 2 (sem calculadora)												
Questões	5.	6.1.	6.2.	6.3.	7.1.	7.2.	7.3.	8.1.	8.2.	8.3.		
Pontos	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	Total	120
Total												200