



Nome: _____

Ano / Turma: _____ N.º: _____ Data: ___ / ___ / ___

-
- Não é permitido o uso de corretor. Deves riscar aquilo que pretendes que não seja classificado.
 - A prova inclui um formulário.
 - As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.
-

CADERNO 1
(É permitido o uso de calculadora gráfica)

1. Seja a um número real positivo.

Considera a sucessão (u_n) em que $u_2 = 6$ e tal que:

$$\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = au_n - a, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Se $u_{12} = 265\,722$, então podes concluir que u_{11} é igual a:

- (A) 797 163 (B) 88 575 (C) 19 (D) 265 692

2. Dada uma sucessão (v_n) , sabe-se que:

- $v_1 = 3$
- $v_2 = 1$
- $\lim(v_n) = -\infty$

Seja (u_n) uma sucessão definida por:

$$u_n = \begin{cases} n^2 + 3v_n & \text{se } n \leq 500 \\ 3 - v_n & \text{se } n > 500 \end{cases}$$

2.1. A sucessão (u_n) é monótona? Justifica.

2.2. Determina $\lim \frac{\sin(n)}{u_n}$.

3. Seja f a função polinomial de grau 4, definida por $f(x) = x^4 - 3x^2 - x + 1$.

Sejam A e B os pontos do gráfico de f de abcissas, respetivamente, 1 e 2.

Justifica que existe um ponto C de abcissa $c \in]1, 2[$ tal que a reta tangente ao gráfico de f no ponto C é paralela à reta AB . Determina o valor, arredondado às centésimas, de c .

4. A população de uma escola secundária, do centro da cidade, distribui-se da seguinte forma:

- 60% dos alunos são rapazes;
- 75% dos alunos vivem na cidade;
- 30% dos alunos que vivem na cidade são raparigas.

Envolvendo todos os alunos da escola é feito um sorteio, de forma aleatória, para atribuir um computador.

4.1. A probabilidade de o computador ser atribuído a uma rapariga que vive na cidade é:

- (A) 0,3 (B) 0,075 (C) 0,12 (D) 0,225

4.2. Determina a probabilidade de o premiado viver na cidade, sabendo que é rapaz. Apresenta o resultado em percentagem.

FIM (Caderno 1)

Cotações							Total
Questões - Caderno 1	1.	2.1.	2.2.	3.	4.1.	4.2.	
Pontos	15	10	10	15	15	15	80

CADERNO 2
(Não é permitido o uso de calculadora)

5. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{3\}$, definida por $f(x) = \frac{x}{|x-3|}$.

Considera a sucessão de números reais (x_n) tal que $x_n = \frac{2}{\sqrt{n}}$.

Qual é o valor de $\lim f(x_n)$?

- (A) 1 (B) $+\infty$ (C) 0 (D) -1

6. Sejam f e g funções reais de variável real, de domínio \mathbb{R} , tais que:

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{10-x}{10x} & \text{se } x > 0 \\ \frac{x}{1-x} & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

Sabe-se que:

- $f(-1) = g(-1)$
- $f(2) = g(2)$

6.1. Determina $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{[f(x) - f(-1)] \times g(x)}{x^2 - 1}$.

6.2. A equação $f(x) = 0,1$ é possível em $] -1, 2[$. Justifica.

6.3. Verifica que $0,1$ está entre $g(-1)$ e $g(2)$ e que $g(-1) \times g(2) < 0$.

Recorrendo ao Teorema de Bolzano-Cauchy, podes garantir que a equação $g(x) = 0,1$ é possível no intervalo $] -1, 2[$? Justifica.

7. Seja f a função real de variável real, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, definida por:

$$f(x) = \left(\frac{x}{x+1} \right)^3$$

Sabe-se que $f''(x) = \frac{6x(1-x)}{(x+1)^5}$, sendo f'' a função segunda derivada de f .

7.1. Mostra que $f'(x) = \frac{3x^2}{(x+1)^4}$.

7.2. Determina a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 1.

7.3. Designa por A e B os pontos de inflexão do gráfico de f , sendo a abscissa de A menor que a abscissa de B e representadas, respetivamente, por x_A e x_B .

Mostra que: $\forall x \in]x_A, x_B[$, $f''(x) > 0$

8. Considera a função f , de domínio \mathbb{R}^+ , definida por $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$.

8.1. Determina, caso exista, uma equação da assíntota vertical ao gráfico de f .

8.2. Seja C o ponto do gráfico de f , representado num referencial o.n. xOy , cuja ordenada é o mínimo absoluto da função f .

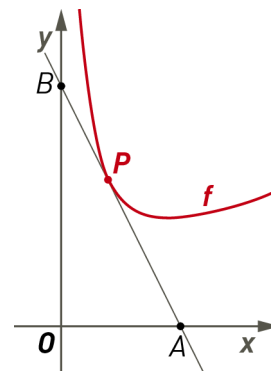
Escreve uma equação da circunferência de centro em C e que passa pela origem do referencial.

8.3. Na figura, em referencial o.n. Oxy , encontra-se representada a função f .

Sabe-se que:

- B pertence a Oy e A pertence a Ox , sendo $\overline{OB} = 2\overline{OA}$;
- a reta AB é tangente ao gráfico de f no ponto P .

Determina as coordenadas do ponto P .



FIM (Caderno 2)

Cotações												
Caderno 1 (com calculadora)												
Questões	1.	2.1.	2.2.	3.	4.1.	4.2.						
Pontos	15	10	10	15	15	15	Total				80	
Caderno 2 (sem calculadora)												
Questões	5.	6.1.	6.2.	6.3.	7.1.	7.2.	7.3.	8.1.	8.2.	8.3.		
Pontos	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	Total	120
Total											200	

FORMULÁRIO

GEOMETRIA

Comprimento de um arco de circunferência: αr

(α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;
 r – raio)

Áreas de figuras planas

Polígono regular: $\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$

Setor circular: $\frac{\alpha r^2}{2}$

(α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$

(r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$

(r – raio)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r – raio)

PROGRESSÕES

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

TRIGONOMETRIA

$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

COMPLEXOS

$(\rho \text{ cis } \theta)^n = \rho^n \text{ cis}(n\theta)$ ou $(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho \text{ cis } \theta} = \sqrt[n]{\rho} \text{ cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ ou $\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho} e^{\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$

($k \in \{0, \dots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$)

PROBABILIDADES

$\mu = p_1 x_1 + \dots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \dots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,9973$

REGRAS DE DERIVAÇÃO

$(u + v)' = u' + v'$

$(u v)' = u' v + u v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' v - u v'}{v^2}$

$(u^n)' = n u^{n-1} u'$ ($n \in \mathbb{R}$)

$(\sin u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' e^u$

$(a^u)' = u' a^u \ln a$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

LIMITES NOTÁVEIS

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ ($n \in \mathbb{N}$)

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$ ($p \in \mathbb{R}$)