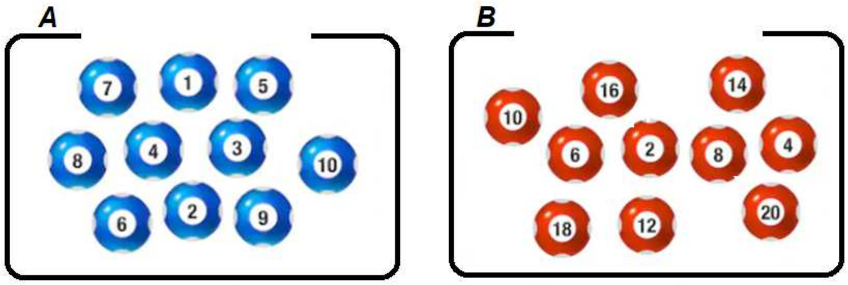
**Nome:** ______________________________________________

**Ano / Turma:** _________ **N.º:** _____ **Data:** ___ - ____ - ___

- Não é permitido o uso de corretor. Deves riscar aquilo que pretendes que não seja classificado.
- A prova inclui um formulário.
- As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

## CADERNO 1
**(É permitido o uso de calculadora gráfica.)**

**1.** Na figura estão representadas duas caixas *A* e *B* com bolas numeradas.




A **caixa A** tem 10 bolas numeradas de 1 a 10.

A **caixa B** tem 10 bolas numeradas com os números pares de 2 a 20.

Algumas bolas foram transferidas da caixa *B* para a caixa *A*.

De seguida, ao acaso, foram retiradas da caixa *A* duas bolas.

Considera os acontecimentos:

***R*:** "A soma dos números das bolas retiradas é um número ímpar."

***S*:** "As duas bolas têm número par."

Sabe-se que os acontecimentos *R* e *S* são equiprováveis, ou seja, $P(R)=P(S)$.

Determina o número de bolas transferidas da caixa *B* para a caixa *A*.

**2.** Sejam $f$ e $g$ funções reais de domínio, respetivamente, $\left[\frac{\pi}{6},\frac{3\pi}{4}\right]$ e $\mathbb{R}$, sendo $f(x)=\sin x$ e $g(x)=\mathrm{e}^x$.

Designando por $h$ a função composta $g\circ f$, sabe-se que o contradomínio de $h$ é um intervalo do tipo $[a,b]$.

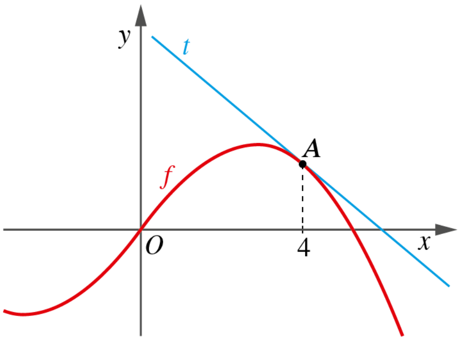
Os valores de *a* e de *b*, arredondados às centésimas são, respetivamente:

**(A)** $a=1{,}65 \quad \wedge \quad b=2{,}03$ **(B)** $a=1{,}65 \quad \wedge \quad b=2{,}72$

**(C)** $a=2{,}03 \quad \wedge \quad b=2{,}72$ **(D)** $a=2{,}72 \quad \wedge \quad b=7{,}39$

**3.** Na figura está representada parte do gráfico da função *f*, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = x\cos(0,3x)$$




A reta *t* é tangente ao gráfico de *f* no ponto *A* de abcissa 4. A inclinação da reta *t* é, em graus e arredondada às décimas:

**(A)** 142,9 **(B)** 37,1 **(C)** –37,1 **(D)** 152,9

**4.** Em casa da Rita há um sistema de aquecimento através de circulação de água quente. Está associado ao sistema um monitor que permite visualizar a **temperatura da água à saída do sistema** e a **temperatura ambiente no interior da casa**.


Durante 45 minutos, após o sistema ter sido ligado, foram feitos vários registos que permitiram definir duas funções *f* e *g*:

- $f(t) = \dfrac{k}{1+2,6\mathrm{e}^{-0,1t}}$ , $t \in [0, 45]$ e $k \in \mathbb{R}^+$

- $g(t) = 28\sin(0,04t)$, $t \in [0, 45]$

A **temperatura da água, em graus Celsius, à saída do sistema,** *t* minutos após o sistema ter sido ligado é dada por $f(t)$ e, nesse instante, $g(t)$ representa a **diferença**, em graus Celsius, **entre a temperatura da água à saída do sistema e a temperatura ambiente no interior da casa**.

**4.1.** Calcula o valor de $k$, sabendo que a temperatura ambiente no interior da casa, no instante em que o sistema foi ligado, era de 15,6 ºC.

**4.2.** Nas questões seguintes, considera $k = 56$ e recorre às capacidades gráficas da calculadora.

**a)** Determina a temperatura ambiente no interior da casa, no instante em que a função *g* atinge o valor máximo. Apresenta o resultado arredondado às décimas, mantendo nos cálculos intermédios pelo menos três casas decimais.

**b)** Resolve o seguinte problema.

"No período de tempo considerado, há um instante em que a temperatura da água à saída é o dobro da temperatura ambiente no interior da casa. Determina esse instante."

Na tua resolução deves apresentar:
– uma equação que traduza o problema;
– a resolução gráfica da equação;
– a solução, em minutos e segundos, sendo os segundos arredondados às unidades.

**FIM (Caderno 1)**

| Cotações | | | | | | | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Questões – Caderno 1** | **1.** | **2.** | **3.** | **4.1.** | **4.2. a)** | **4.2. b)** | |
| **Pontos** | 14 | 12 | 12 | 12 | 15 | 20 | **85** |

**CADERNO 2**
**(Não é permitido o uso de calculadora.)**

**5.** O esquema seguinte representa duas linhas consecutivas do Triângulo de Pascal.

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccccc} & 1 & & \bullet & & \bullet & & \cdots & & \overset{a}{\bullet} & & \overset{a}{\bullet} & & \cdots & & \bullet & & \bullet & & 1 & \\ 1 & & \bullet & & \bullet & & \cdots & & \bullet & & \overset{2a}{\bullet} & & \bullet & & \cdots & & \bullet & & \bullet & & 1 \end{array}$$

A segunda linha do esquema pode ser representada por: ${}^nC_0 \quad {}^nC_1 \quad {}^nC_2 \quad \cdots \quad {}^nC_{n-1} \quad {}^nC_n$ .

O valor de $n$ pode ser:

**(A)** 2015 **(B)** 2019 **(C)** 2022 **(D)** 2025

**6.** Sejam $a$ e $b$ números reais maiores que 1.

Se $\log_a\left(\sqrt{ab}\right)=5$ , então valor numérico de $\log_b\left(a^2b\right)$ é:

**(A)** $\frac{13}{12}$ **(B)** $\frac{7}{3}$ **(C)** $\frac{1+\sqrt{5}}{5}$ **(D)** $\frac{11}{9}$

**7.** Considera a função $f$, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x)=\ln^2(x)-\ln\left(\frac{1}{x}\right)$.

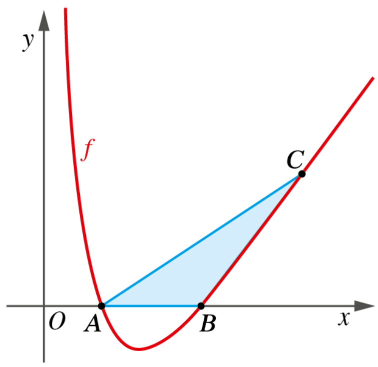
Na figura, em referencial o.n. $Oxy$, estão representados o gráfico de $f$ e o triângulo $[ABC]$. Sabe-se que:

– as abcissas de $A$ e de $B$ são zeros de $f$ ;

– $C$ é um ponto de inflexão do gráfico de $f$ ;

– a função derivada de $f$ é definida por:

$$f'(x)=\frac{2}{x}\ln(x)+\frac{1}{x}\,, \quad \forall x\in\mathbb{R}^+$$




**7.1.** Mostra que existe um ponto $P$ do gráfico de $f$ , de abcissa pertencente ao intervalo $\left]\frac{1}{\mathrm{e}},1\right[$ , em que a reta tangente ao gráfico no ponto $P$ é paralela à reta definida pela equação $y=-2x+3$ .

**7.2.** Determina as coordenadas dos pontos $A$, $B$ e $C$ e mostra que a área do triângulo $[ABC]$ é igual a $\frac{3(\mathrm{e}-1)}{8\mathrm{e}}$ .

**8.** Considera a função $f$, de domínio $]-\infty, \pi[$ , definida por:

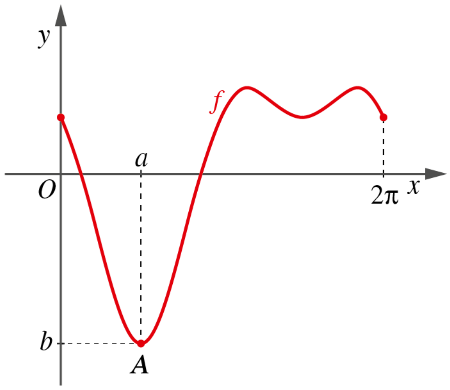
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos^2(x)}{-2x\sin(x)} & \text{se} \quad x\in\,]0,\pi[\\[2mm] -\dfrac{1}{2} & \text{se} \quad x\in[-1,0]\\[2mm] \dfrac{e^{x+1}-1}{x^2-1} & \text{se} \quad x\in\,]-\infty,-1[\end{cases}$$

**8.1.** Mostra que o gráfico de $f$ admite uma assíntota horizontal. Indica uma equação dessa assíntota.

**8.2.** Estuda a função $f$ quanto à continuidade em $x=0$ e em $x=-1$.

**9.** Na figura, em referencial o.n. $Oxy$, está representada a função $f$, de domínio $[0, 2\pi]$, definida por:

$$f(x)=\cos(2x)-2\sin x$$




**9.1.** O ponto $A(a,b)$ pertence ao gráfico de $f$, sendo $a$ o menor zero da função derivada de $f$.

Determina as coordenadas do ponto $A$.

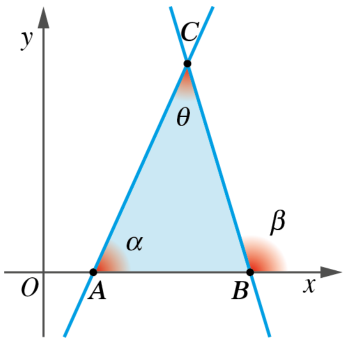
**9.2.** Mostra que $\forall x\in[0, 2\pi],\ f(x)=-2\sin^2(x)-2\sin(x)+1$ e resolve a equação $f(x)=-\dfrac{1}{2}$.

**10.** Na figura está representado o triângulo $[ABC]$.

Sabe-se que:

- $\alpha$ e $\beta$ representam as inclinações das retas $AC$ e $BC$, respetivamente;
- a reta $AC$ é definida pela equação $y=mx+b$;
- a reta $BC$ é definida pela equação $y=m'x+b'$.

Mostra que $\tan(\theta)=\dfrac{m'-m}{1+m'm}$.




**FIM (Caderno 2)**

| Cotações | | | | | | | | | | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Questões – Caderno 2** | **5.** | **6.** | **7.1.** | **7.2.** | **8.1.** | **8.2.** | **9.1.** | **9.2.** | **10.** | |
| **Pontos** | 12 | 12 | 15 | 15 | 10 | 14 | 12 | 15 | 10 | **115** |

# FORMULÁRIO

## GEOMETRIA

**Comprimento de um arco de circunferência:** $\alpha r$

($\alpha$ : amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; $r$ : raio)

**Área de um polígono regular:** Semiperímetro $\times$ Apótema

**Área de um setor circular:** $\frac{\alpha r^2}{2}$

($\alpha$ : amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; $r$ : raio)

**Área lateral de um cone:** $\pi r g$

($r$ : raio da base; $g$ : geratriz)

**Área de uma superfície esférica:** $4\pi r^2$

($r$ : *raio*)

**Volume de uma pirâmide:** $\frac{1}{3} \times$ Área da base $\times$ Altura

**Volume de um cone:** $\frac{1}{3} \times$ Área da base $\times$ Altura

**Volume de uma esfera:** $\frac{4}{3}\pi r^3$ ($r$ : raio)

## PROGRESSÕES

Soma dos $n$ primeiros termos de uma progressão $(u_n)$:

**Progressão aritmética:** $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

**Progressão geométrica:** $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

## TRIGONOMETRIA

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

## COMPLEXOS

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$ ou $(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ ou $\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$

$(k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

## PROBABILIDADES

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se $X$ é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

## REGRAS DE DERIVAÇÃO

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\sin u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

## LIMITES NOTÁVEIS

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$