Porto Editora

Nome: ____

Ano / Turma: _________ **N.º:** _____ **Data:** ___ - ____ - ___

- Não é permitido o uso de corretor. Deves riscar aquilo que pretendes que não seja classificado.
- A prova inclui um formulário.
- As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

CADERNO 1
(É permitido o uso de calculadora gráfica.)

1. Numa unidade de saúde há uma equipa constituída por sete médicos: quatro homens e três mulheres, entre eles um casal, a Sílvia e o Gustavo.

1.1. Para a escala de fim de semana vão ser escolhidos, ao acaso, três membros da equipa.

A probabilidade, arredondada às milésimas, de pelo menos um dos membros do casal ser escolhido é:

(A) 0,286 **(B)** 0,571 **(C)** 0,714 **(D)** 0,857

1.2. Para tirar uma fotografia, a equipa de médicos vai dispor-se lado a lado, formando uma sequência de sete elementos, como é sugerido pela figura.

Determina o número de sequências diferentes que é possível formar, de modo que os membros do casal fiquem juntos.

2. Seja f uma função, de domínio $\mathbb{R}$, sendo A o único ponto de inflexão do gráfico de f.

Sabe-se que a função f', derivada de f, é definida por $f'(x) = 4x - e^x$.

2.1. O valor da abcissa de A, arredondada às centésimas, é:

(A) 1,39 **(B)** 0,36 **(C)** 2,15 **(D)** 1,55

2.2. Sabe-se que $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{f(x) - f(4)}{x^2 - 4x} = k$.

Indica a afirmação verdadeira.

(A) $-10 < k < -9$ **(B)** $8 < k < 9$

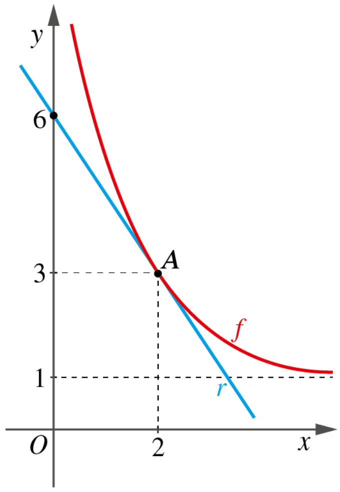
(C) $-39 < k < -38$ **(D)** $10 < k < 11$

3. Na figura está representada parte do gráfico de uma função f, de domínio $\mathbb{R}$ e contradomínio $\mathbb{R}^+$.

Sabe-se que:

. a reta r é tangente ao gráfico no ponto $A(2,3)$ e interseta Oy no ponto de coordenadas $(0, 6)$;

. a reta $y = 1$ é assíntota ao gráfico de f quando x tende para $+\infty$.



3.1. O valor de $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x - f(x)}{x}$ é:

(A) $+\infty$ **(B)** 2 **(C)** 0 **(D)** 3

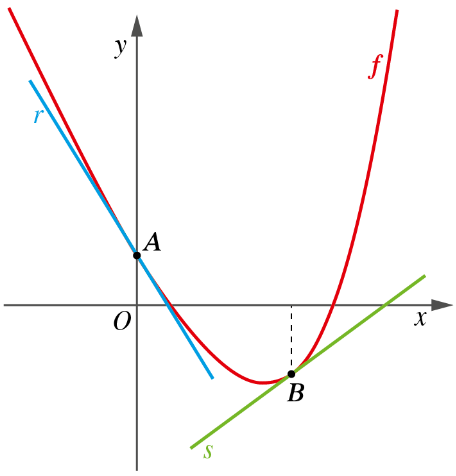
3.2. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = x^2 - \sqrt{f(x)}$.

Calcula $g'(2)$ e apresenta o resultado arredondado às centésimas.

4. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \sqrt{e^x} - 2x$$

Na figura, em referencial o.n. Oxy, estão representadas as retas r e s e o gráfico da função f.



Sabe-se que:

▪ a reta r é tangente ao gráfico de f no ponto A, interseção do gráfico de f com o eixo Oy;

▪ a reta s é perpendicular à reta r e é tangente ao gráfico de f no ponto B.

Determina, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, a abcissa do ponto B.

Na tua resposta deves apresentar:

▪ uma expressão da derivada da função f;

▪ a reta r, na forma de equação reduzida;

▪ a relação entre os declives das retas r e s;

▪ a resolução gráfica da equação cuja solução é a abcissa de B;

▪ o valor da abcissa de B, arredondado às centésimas.

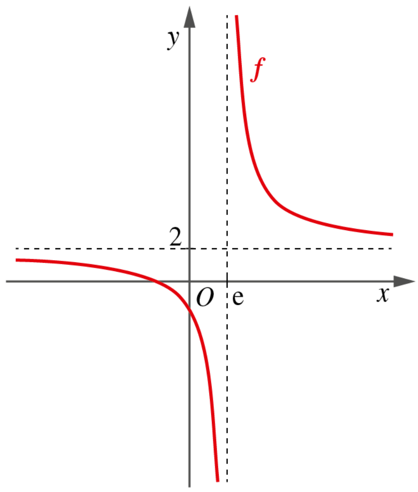
FIM (Caderno 1)

Cotações								Total
Questões – Caderno 1	**1.1.**	**1.2.**	**2.1.**	**2.2.**	**3.1.**	**3.2.**	**4.**	
Pontos	12	15	12	12	12	15	17	**95**

CADERNO 2
(Não é permitido o uso de calculadora.)

5. Na figura, em referencial o.n. *Oxy*, está representada uma função racional f, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{e\}$.

Sabe-se que as retas $y=2$ e $x=e$ são assíntotas ao gráfico de f.



Seja (u_n) a sucessão de termo geral $u_n=\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$.

Por observação da representação gráfica, o $\lim f(u_n)$ é:

(A) 2 **(B)** $+\infty$ **(C)** 0 **(D)** $-\infty$

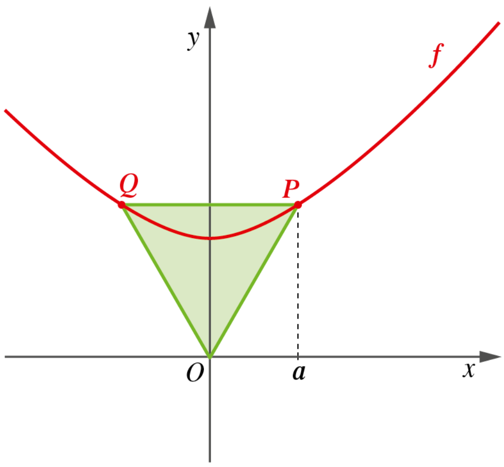
6. Considera a função f par, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x)=\sqrt{x^2+4}$.

6.1. Determina, na forma reduzida, as equações das assíntotas ao gráfico de f.

6.2. Na figura abaixo está representada parte do gráfico de f e o triângulo $[OPQ]$.

Sabe-se que:

- P e Q pertencem ao gráfico de f;
- a é a abcissa de P, com $a>0$;
- a reta PQ é paralela a Ox.

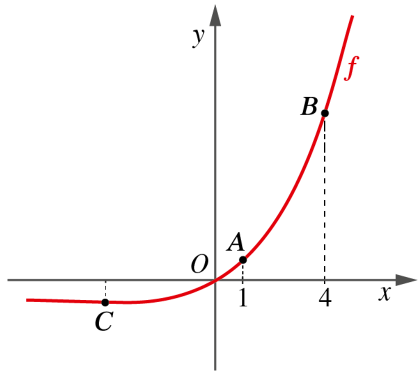


Seja g a função que a cada valor de a faz corresponder a área do triângulo $[OPQ]$.

a) Mostra que $g(a)=a\sqrt{a^2+4}$.

b) Mostra que existe um valor de $a\in\,]1,2[$ tal que o valor da medida da área do triângulo é $\sqrt{28}$.

7. Na figura está representada a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x)=\frac{x}{2}e^{\frac{x}{4}}$.



7.1. Os pontos A e B pertencem ao gráfico de f e as abcissas são, respetivamente, 1 e 4.

Considera a sucessão convergente (u_n) definida por $u_n=\left(\frac{n+k}{n+2}\right)^n$, $k\in\mathbb{R}$.

Sabe-se que $\lim(u_n)=f(1)\times f(4)$. Então, o valor de k é:

(A) $\frac{5}{4}$ **(B)** $e^{\frac{5}{4}}$ **(C)** $\frac{13}{4}$ **(D)** $\frac{3}{4}$

7.2. O ponto C de abcissa c pertence ao gráfico de f.

Sabendo que $f(c)$ é mínimo absoluto da função f, determina as coordenadas do ponto C.

8. Considera as funções f e g, de domínio $\mathbb{R}$, definidas por $f(x)=4^{x+1}-\frac{1}{2}$ e $g(x)=2^x$.

8.1. Resolve a inequação $f(x)\leq 0$.
Apresenta a solução na forma de intervalo de números reais.

8.2. Resolve a equação $f(x)=g(x)$.

9. Seja k um número real e f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{e^{2x}-e^x}{2x} & \text{se } x>0\\ 4^k & \text{se } x=0\\ \frac{e^{\frac{1}{x}}+1}{2} & \text{se } x<0\end{cases}$$

Verifica se existe k de modo que a função f seja contínua no ponto de abcissa 0.

FIM (Caderno 2)

Cotações										Total
Questões – Caderno 2	**5.**	**6.1.**	**6.2. a)**	**6.2. b)**	**7.1.**	**7.2.**	**8.1.**	**8.2.**	**9.**	
Pontos	12	12	10	12	12	15	10	10	12	**105**

FORMULÁRIO

GEOMETRIA

Comprimento de um arco de circunferência: αr

(α : amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;
r : raio)

Área de um polígono regular: Semiperímetro $\times$ Apótema

Área de um setor circular: $\frac{\alpha r^2}{2}$

(α : amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r : raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$

(r : raio da base; g : geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$

(r : *raio*)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ Área da base $\times$ Altura

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ Área da base $\times$ Altura

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r : raio)

PROGRESSÕES

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$

TRIGONOMETRIA

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

COMPLEXOS

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$ ou $(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ ou $\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$

$(k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

PROBABILIDADES

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

REGRAS DE DERIVAÇÃO

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\sin u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

LIMITES NOTÁVEIS

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$