Novo Espaço – Matemática A, 12.º ano

Proposta de teste global [junho – 2020]

Nome: ____

Ano / Turma: _________ **N.º:** _____ **Data:** ___ - ____ - ___

- Não é permitido o uso de corretor. Deves riscar aquilo que pretendes que não seja classificado.
- A prova inclui um formulário.
- As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

---

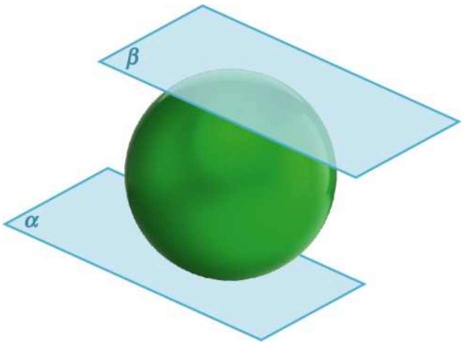
1. Na figura estão representados dois planos, α e β, e uma esfera.

Em relação a um referencial ortonormado (o.n.) Oxy, sabe-se que:

▪ a esfera é definida pela inequação $x^2 + y^2 + z^2 \leq 25$;

▪ os planos α e β são paralelos e ambos tangentes à esfera;

▪ o plano β é tangente à esfera no ponto de coordenadas $(-3\ ,\ 4\ ,\ 0)$.



O plano α pode ser definido pela equação:

(A) $3x - 4y = 0$ **(B)** $3x - 4y + z = 25$

(C) $-3x + 4y + 25 = 0$ **(D)** $3x - 4y + 5 = 0$

2. Em relação a um referencial o.n. $Oxyz$, considera os pontos $A(1,-1,1)$, $B(0,1,-2)$ e $C(2,m+2,4)$, $m \in \mathbb{R}$.

Determina os valores de m para os quais:

2.1. os pontos A, B e C definem um plano;

2.2. o ângulo BAC é obtuso.

3. Seja (u_n) a sucessão definida por: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n, \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Em relação a dois termos consecutivos da sucessão (u_n), sabe-se que:

▪ a sua diferença é 44;

▪ a sua soma é 970.

Determina esses termos e as respetivas ordens.

4. Seja k um número real positivo.

De uma progressão aritmética (u_n), sabe-se que $u_3 = \log_2(k)$ e $u_5 = \log_2(3k)$.

Qual é a razão da progressão aritmética?

(A) $\log_2 3$ **(B)** $\log_2 9$

(C) 3 **(D)** $\log_2 \sqrt{3}$

5. Seja Ω o espaço amostral (espaço de resultados) associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos ($A \in \Omega$ e $B \in \Omega$).

Sabe-se que:

- $P(A \cap B) = P\left(\overline{A \cup B}\right)$
- $P(A) = 0{,}34$

Determina o valor de $P(B)$.

6. O Decreto-Lei n.º 2/2020, de 14 de janeiro, estabeleceu o novo sistema de matrículas dos automóveis, em Portugal.

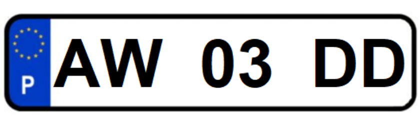
No **sistema anterior**, a matrícula era constituída por dois algarismos, seguidos de duas letras e, depois, de dois algarismos (considera-se o alfabeto com **23 letras**).

No **novo sistema**, a matrícula é constituída por dois pares de letras e, entre eles, um par de algarismos (considera-se o alfabeto com **26 letras**, pois incluem as letras Y, K e W).

Exemplos:

Sistema anterior

Novo sistema



6.1. O número de matrículas que o novo sistema permite a mais do que o sistema anterior, supondo que todas as combinações de letras podem ser utilizadas, é:

(A) 40 407 600 **(B)** 22 694 100 **(C)** 33 926 400 **(D)** 29 741 760

6.2. No novo sistema, um computador gera, de forma aleatória, uma matrícula. Determina a probabilidade de essa matrícula ter exatamente três letras iguais.

Apresenta o resultado arredondado às milésimas.

7. Considera a função *f*, de domínio $]3,+\infty[$, definida por $f(x)=4x+\ln(x-3)$.

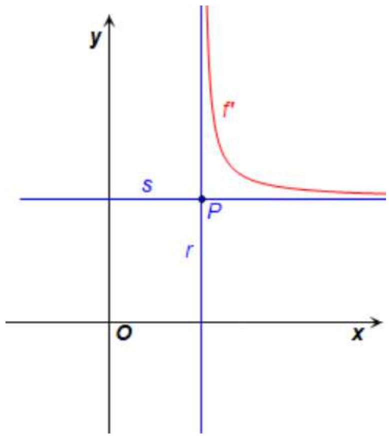
7.1. Qual é o valor de $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(4+h)-f(4)}{h}$?

(A) 0 **(B)** 5 **(C)** 4 **(D)** $+\infty$

7.2. Na figura, em referencial o.n. *Oxy*, está representada a função f', função derivada de f.

Sabe-se que as retas *r* e *s* são assíntotas ao gráfico de f' e P é o ponto de interseção destas retas.

Determina as coordenadas do ponto P.

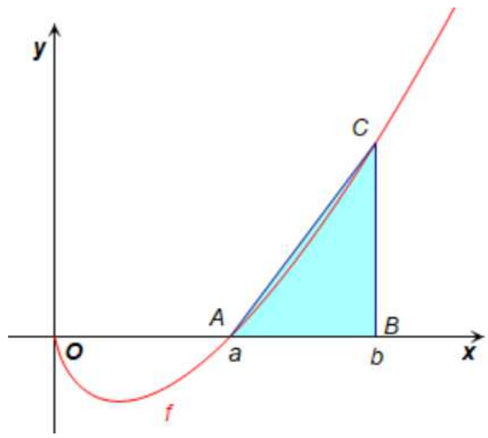


8. Na figura, em referencial o.n. *Oxy*, está representada a função *f*, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por:

$$f(x)=x\ln x-x$$

Sabe-se que:

- o ponto *A* tem coordenadas $(a,0)$, sendo *a* zero da função;
- o ponto *B* tem coordenadas $(b,0)$;
- o ponto *C* pertence ao gráfico de *f* e tem abcissa igual à do ponto *B*;
- $b>a$.



8.1. Recorrendo à definição de derivada de uma função num ponto, determina $f'(\mathrm{e})$.

8.2. Considera $b=2\mathrm{e}$.

Mostra que a área do triângulo [*ABC*] é igual a $\mathrm{e}^2\ln 2$.

9. Considera a função *f*, de domínio $\mathbb{R}$, definida por: $f(x)=\begin{cases} 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x>0 \\ 1-\cos(3x) & \text{se } x\leq 0 \end{cases}$

9.1. Sejam *A* o ponto do gráfico da função com abcissa $-\frac{\pi}{6}$ e *t* a reta tangente ao gráfico de *f* no ponto *A*.

Sabe-se que a reta *s* é perpendicular à reta *t* e que passa pelo ponto *A*.

Qual é o declive da reta *s*?

(A) -3 **(B)** $-\frac{1}{3}$ **(C)** 3 **(D)** $\frac{1}{3}$

9.2. Mostra que a equação $f(x)=\sin x$ é possível no intervalo $\left]-\frac{4\pi}{3},-\pi\right[$.

9.3. Calcula o valor de $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

10. Na sessão de apresentação de um livro literário foram vendidos alguns exemplares.

Sabe-se que o número de livros, em centenas, vendidos até *t* meses após a sessão de apresentação, é dado pelo seguinte modelo matemático:

$$L(t)=\frac{96}{1+3e^{-0,5t}}$$

10.1. Calcula os seguintes valores e interpreta o resultado no contexto apresentado:

a) $L(0)$

b) $L(3)-L(2)$, apresentando o valor arredondado às centésimas.

10.2. Recorre às capacidades gráficas da calculadora e resolve o seguinte problema:

“Houve um mês em que foram vendidos 73 livros.
Determina o número total de livros vendidos até o final desse mês.”

Sugestão: Identifica o significado da expressão $L(t+1)-L(t)$.

Na tua resolução deves apresentar:

- a equação que te permite determinar o mês em que foram vendidos 73 livros;
- a resolução gráfica da equação;
- a expressão que te permite dar a resposta ao problema.

11. Seja x um número real e $z = x + 2\mathrm{i}$ um número complexo.

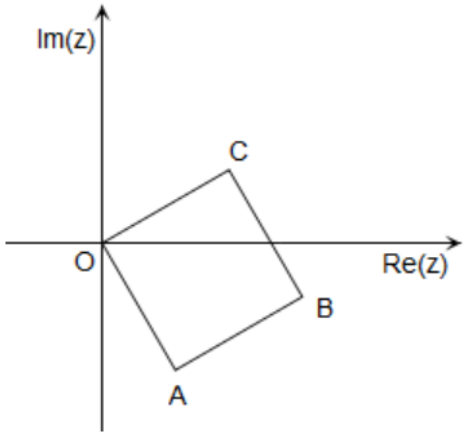
11.1. Determina para que valores de x, o afixo (imagem geométrica) de z, no plano complexo, pertence à circunferência de centro no afixo de i e raio 2.

11.2. Considera $x = \sqrt{12}$ e determina o menor número natural n para o qual z^n é um número real negativo.

12. Na figura, no plano complexo, está representado o quadrado $[OABC]$.

Os pontos A, B e C são os afixos (imagens geométricas) dos números complexos z_A, z_B e z_C, respetivamente.

Sabe-se que $z_C = \sqrt{3} + \mathrm{i}$.



12.1. Representa z_B na forma trigonométrica, em que o argumento pertence ao intervalo $[0, 2\pi[$.

12.2. Sabe-se que $z = 2e^{\mathrm{i}\theta}$, $\theta \in \,]-\pi, \pi]$.

Indica, na forma de intervalo de números reais, os valores de θ para os quais o afixo de z pertence ao quadrado $[OABC]$.

FIM

Cotações																							Total
Questões	**1.**	**2.1**	**2.2**	**3.**	**4**	**5**	**6.1**	**6.2**	**7.1**	**7.2**	**8.1**	**8.2**	**9.1**	**9.2**	**9.3**	**10.1 a)**	**10.1 b)**	**10.2**	**11.1**	**11.2**	**12.1**	**12.2**	
Pontos	6	10	10	10	6	10	6	10	6	10	10	10	10	10	10	7	7	12	10	10	10	10	**200**

FORMULÁRIO

GEOMETRIA

Comprimento de um arco de circunferência: αr
(α : amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;
r : raio)

Área de um polígono regular: Semiperímetro $\times$ Apótema

Área de um setor circular: $\dfrac{\alpha r^2}{2}$

(α : amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r : raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$

(r : raio da base; g : geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$

(r : raio)

Volume de uma pirâmide: $\dfrac{1}{3} \times$ Área da base $\times$ Altura

Volume de um cone: $\dfrac{1}{3} \times$ Área da base $\times$ Altura

Volume de uma esfera: $\dfrac{4}{3}\pi r^3$ (r : raio)

PROGRESSÕES

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\dfrac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \dfrac{1 - r^n}{1 - r}$

TRIGONOMETRIA

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\dfrac{\sin A}{a} = \dfrac{\sin B}{b} = \dfrac{\sin C}{c}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

COMPLEXOS

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$ ou $(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\dfrac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ ou $\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$

$(k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

PROBABILIDADES

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

REGRAS DE DERIVAÇÃO

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\sin u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

$(\tan u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

LIMITES NOTÁVEIS

$\lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$