Novo Espaço – Matemática A, 12.º ano

Proposta de teste de avaliação [março – 2020]

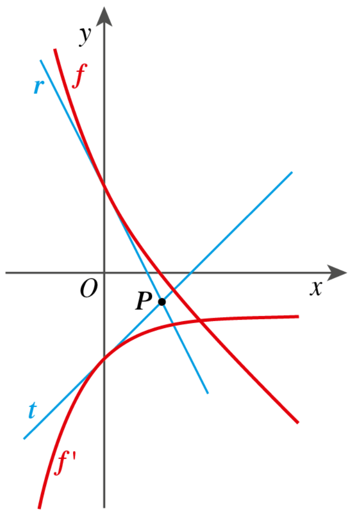
Nome: ____

Ano / Turma: _________ **N.º:** _____ **Data:** ___ - ____ - ___

- Não é permitido o uso de corretor. Deves riscar aquilo que pretendes que não seja classificado.
- A prova inclui um formulário.
- As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

---

1. Na figura estão representadas, num referencial o.n. Oxy, as funções f e f' (função derivada de f), sendo f definida por $f(x) = \mathrm{e}^{-x} - x + 1$.



Sabe-se que:

- a reta r é tangente ao gráfico de f no ponto em que este interseta Oy;
- a reta t é tangente ao gráfico de f' no ponto em que este interseta Oy;
- o ponto de interseção das retas r e t é designado por P.

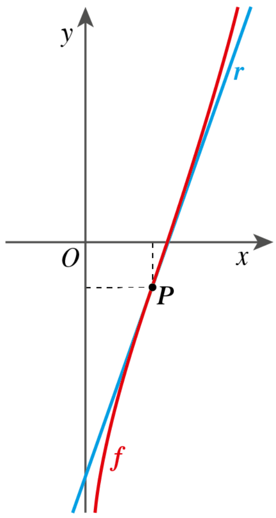
1.1. Determina $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f'(x) + 2}{x}$.

1.2. Resolve a equação $f'(x) = f''(x) - \mathrm{e}^{x}$.

1.3. Determina as coordenadas do ponto P.

2. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por:

$$f(x) = x^2 - \ln\left(\frac{2}{x}\right)$$



Na figura estão representadas, num referencial o.n. Oxy, a função f e a reta r tangente ao gráfico de f no ponto P com declive mínimo.

2.1. Mostra que $\forall x \in \mathbb{R}^+, \ f'(x) = \dfrac{2x^2 + 1}{x}$.

2.2. Determina a abcissa do ponto P.

3. Seja k um número real positivo e f a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por:

$$f(x) = x\ln\left(1+\frac{k}{x}\right) - x$$

3.1. Podes concluir que $f(1)$ é igual a:

(A) $-1+\ln k$ **(B)** 0 **(C)** $\ln\left(\frac{1+k}{\mathrm{e}}\right)$ **(D)** -1

3.2. Mostra que a reta de equação $y=-x+k$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f.

4. Dois alunos do 12.º ano, a Sofia e o Bernardo, influenciados pelas notícias diárias sobre o novo coronavírus, pesquisaram dados relativos à evolução do número total de contágios validados.

De 7 a 23 de fevereiro de 2020, em dias distintos, a Sofia e o Bernardo fizeram a recolha de dados e, com recurso às capacidades gráficas da calculadora, obtiveram dois modelos matemáticos.	
Modelo da Sofia	**Modelo do Bernardo**
$S(t) = \dfrac{88\,960}{1+1{,}84\mathrm{e}^{-0{,}24t}}$ $S(t)$ representa o número de contágios validados t dias após 7 de fevereiro.	$B(t) = 36\,257\,\mathrm{e}^{0{,}075t}$ $B(t)$ representa o número de contágios validados t dias após 7 de fevereiro.

4.1. Calcula $B(4)$.

Apresenta o resultado arredondado às unidades e interpreta-o, no contexto apresentado.

4.2. No final do dia 14 de fevereiro, o número de contágios validados era 67 100.

Qual dos modelos apresenta um resultado mais próximo do resultado real?

Justifica, de forma clara, a tua resposta.

5. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(2x)}{x} & \text{se } x>0\\ x\cos(2x) & \text{se } x\leq 0\end{cases}$$

5.1. $f(\alpha)\times f(-\alpha)$, $\alpha\in\mathbb{R}^+$, é necessariamente igual a:

(A) $\dfrac{\sin(2\alpha)}{2}$ **(B)** $\cos(4\alpha)$ **(C)** $-\dfrac{\cos(2\alpha)}{2}$ **(D)** $-\dfrac{\sin(4\alpha)}{2}$

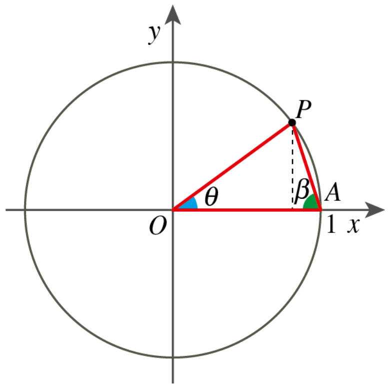
5.2. Mostra que a função f é descontínua em $x=0$.

5.3. Seja A um ponto do gráfico de f cuja abcissa pertence ao intervalo $[-\pi,0[$ e é zero da função. Determina as coordenadas do ponto A.

6. Na figura está representada, num referencial o.n. Oxy, uma circunferência de centro O e raio 1.

Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas (1, 0);
- o ponto P pertence à circunferência;
- θ é a amplitude, em radianos, do ângulo AOP, com $\theta\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$;
- β é a amplitude, em radianos, do ângulo PAO.



Recorre às capacidades gráficas da calculadora para determinar um valor arredondado às centésimas da abcissa do ponto P, no caso em que $\beta=2\theta$.

Tem em atenção que $\tan\beta=\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$.

Na resposta deves incluir:

- a equação que permite determinar o valor de θ;
- a reprodução, num referencial, da resolução gráfica da equação, apresentando o valor de θ com quatro casas decimais;
- a abcissa de P arredondada às centésimas.

FIM

Cotações														Total
Questões	**1.1.**	**1.2.**	**1.3.**	**2.1.**	**2.2.**	**3.1.**	**3.2.**	**4.1.**	**4.2.**	**5.1.**	**5.2.**	**5.3.**	**6.**	
Pontos	13	15	20	15	20	13	15	13	13	13	15	15	20	**200**

FORMULÁRIO

GEOMETRIA

Comprimento de um arco de circunferência: αr
(α : amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r : raio)

Área de um polígono regular: Semiperímetro $\times$ Apótema

Área de um setor circular: $\frac{\alpha r^2}{2}$
(α : amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r : raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$
(r : raio da base; g : geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$
(r : raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3}\times$ Área da base $\times$ Altura

Volume de um cone: $\frac{1}{3}\times$ Área da base $\times$ Altura

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r : raio)

PROGRESSÕES

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1+u_n}{2}\times n$

Progressão geométrica: $u_1\times\frac{1-r^n}{1-r}$

TRIGONOMETRIA

$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a$

$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$

$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

COMPLEXOS

$(\rho\ \text{cis}\ \theta)^n=\rho^n\ \text{cis}(n\theta)$ ou $(\rho\ e^{i\theta})^n=\rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho\ \text{cis}\ \theta}=\sqrt[n]{\rho}\ \text{cis}\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$ ou $\sqrt[n]{\rho\ e^{i\theta}}=\sqrt[n]{\rho}\ e^{\frac{\theta+2k\pi}{n}}$

$(k\in\{0,\ \ldots,\ n-1\}$ e $n\in\mathbb{N})$

PROBABILIDADES

$\mu=p_1x_1+\ldots+p_nx_n$

$\sigma=\sqrt{p_1(x_1-\mu)^2+\ldots+p_n(x_n-\mu)^2}$

Se X é $N(\mu,\sigma)$, então:

$P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)\approx 0{,}6827$

$P(\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma)\approx 0{,}9545$

$P(\mu-3\sigma<X<\mu+3\sigma)\approx 0{,}9973$

REGRAS DE DERIVAÇÃO

$(u+v)'=u'+v'$

$(u\,v)'=u'\,v+u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\,v-u\,v'}{v^2}$

$(u^n)'=n\,u^{n-1}\,u'\quad(n\in\mathbb{R})$

$(\sin u)'=u'\cos u$

$(\cos u)'=-u'\sin u$

$(\tan u)'=\frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)'=u'\,e^u$

$(a^u)'=u'\,a^u\ln a\quad(a\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\})$

$(\ln u)'=\frac{u'}{u}$

$(\log_a u)'=\frac{u'}{u\ln a}\quad(a\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\})$

LIMITES NOTÁVEIS

$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\quad(n\in\mathbb{N})$

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

$\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{x^p}=+\infty\quad(p\in\mathbb{R})$