



Nome: _____

Ano / Turma: _____ N.º: _____ Data: ____ - ____ - ____

-
- Não é permitido o uso de corretor. Deves riscar aquilo que pretendes que não seja classificado.
 - A prova inclui um formulário.
 - As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.
-

1. Qual é o limite da sucessão de termo geral $\left(3 - \frac{2n+1}{n+2}\right)^n$?

- (A) $\frac{1}{e^3}$ (B) 1 (C) e^3 (D) e^2

2. Para um certo número real k , considera a função f , definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \log_3(x+1) & \text{se } x \geq 0 \\ 2^k & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Sabe-se que os pontos A e B pertencem ao gráfico de f e que têm a mesma ordenada e abcissas 26 e $-\sqrt{3}$, respetivamente.

Qual é o valor de k ?

- (A) $\log_2 3$ (B) 0 (C) $\log_3 2$ (D) 3

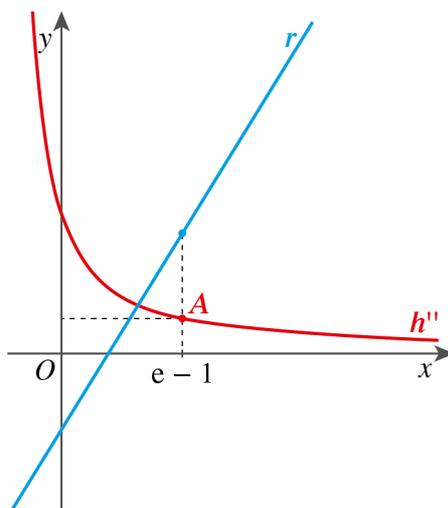
3. Seja f a função, de domínio \mathbb{R} , definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{e^{x-1} - 1} & \text{se } x > 1 \\ 2 & \text{se } x = 1 \\ \frac{-2x + 2}{x^2 - 3x + 2} & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

Estuda a função f quanto à continuidade em $x = 1$ e à existência de assíntotas ao seu gráfico paralelas aos eixos coordenados.

4. Considera a função h , de domínio $]-1, +\infty[$, definida por $h(x) = x \ln(x+1)$.

Na figura estão representados o gráfico de h'' (segunda derivada de h) e uma reta r .



Sabe-se que:

- a reta r é tangente ao gráfico da função h no ponto de abcissa $e-1$;
- o ponto A pertence ao gráfico da função h'' e tem abcissa $e-1$.

- 4.1. O declive da reta r é igual a:

(A) $\frac{1}{e}$ (B) $\frac{e-1}{e}$ (C) $\frac{e}{e+1}$ (D) $2 - \frac{1}{e}$

- 4.2. Determina a ordenada do ponto A .

5. Considera a função f , de domínio \mathbb{R}^+ , definida por:

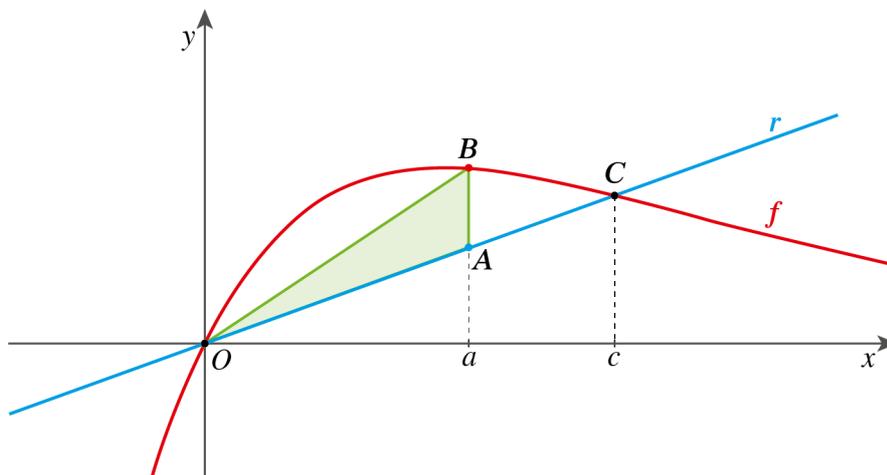
$$f(x) = \sqrt{x} \times \ln x$$

Estuda a função f , por processos exclusivamente analíticos, quanto à monotonia e à existência de extremos.

6. Na figura estão representadas parte do gráfico de uma função f definida por:

$$f(x) = 2xe^{-\frac{x}{2}}$$

e uma reta r definida pela equação $y = \frac{x}{e}$.



Sabe-se que:

- . C é o ponto de interseção da reta r com o gráfico de f , de abscissa c , com $c > 0$;
- . os pontos A e B são pontos móveis, com a mesma abscissa a , com $0 < a < c$, em que A pertence à reta r e B pertence ao gráfico de f .

A cada posição dos pontos A e B corresponde um triângulo $[OAB]$.

- 6.1. Por um processo exclusivamente analítico, determina c (abscissa do ponto C).
- 6.2. Há dois valores de a para os quais a medida da área do triângulo $[OAB]$ é igual a 0,25.

Determina, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, os valores de a .

Na tua resposta:

- . apresenta uma equação que te permita resolver o problema;
- . reproduz num referencial o.n. Oxy o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que te permite(em) resolver a equação;
- . apresenta as soluções arredondadas às centésimas.

FIM

Cotações									Total
Questões	1.	2.	3.	4.1.	4.2.	5.	6.1.	6.2.	
Pontos	15	15	35	15	30	30	30	30	200

FORMULÁRIO

GEOMETRIA

Comprimento de um arco de circunferência: αr

(α : amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;

r : raio)

Área de um polígono regular: Semiperímetro \times Apótema

Área de um setor circular: $\frac{\alpha r^2}{2}$

(α : amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r : raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$

(r : raio da base; g : geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$

(r : raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ Área da base \times Altura

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ Área da base \times Altura

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r : raio)

PROGRESSÕES

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$

TRIGONOMETRIA

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

COMPLEXOS

$$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta) \quad \text{ou} \quad (\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$$

$$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis} \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \quad \text{ou} \quad \sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho} e^{\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$$

$$(k \in \{0, \dots, n-1\} \text{ e } n \in \mathbb{N})$$

PROBABILIDADES

$$\mu = p_1 x_1 + \dots + p_n x_n$$

$$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \dots + p_n (x_n - \mu)^2}$$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,6827$$

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$$

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,9973$$

REGRAS DE DERIVAÇÃO

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(u v)' = u' v + u v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' v - u v'}{v^2}$$

$$(u^n)' = n u^{n-1} u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$(\sin u)' = u' \cos u$$

$$(\cos u)' = -u' \sin u$$

$$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$(e^u)' = u' e^u$$

$$(a^u)' = u' a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

LIMITES NOTÁVEIS

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$