CADERNO 1

1. Acontecimentos dados:

***R*:** "A soma dos números das bolas retiradas é um número ímpar."

***S*:** "As duas bolas têm número par."

Seja n o número de bolas transferidas da caixa B para a caixa A.

O número de bolas da caixa A passa a ser $10+n$, sendo $5+n$ o número de bolas pares.

$$P(R)=\frac{{}^{5}C_1\times{}^{n+5}C_1}{{}^{n+10}C_2} \quad \text{e} \quad P(S)=\frac{{}^{n+5}C_2}{{}^{n+10}C_2}$$

$$P(R)=P(S) \Leftrightarrow \frac{{}^{5}C_1\times{}^{n+5}C_1}{{}^{n+10}C_2}=\frac{{}^{n+5}C_2}{{}^{n+10}C_2} \Leftrightarrow {}^{5}C_1\times{}^{n+5}C_1={}^{n+5}C_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5(n+5)=\frac{(n+5)!}{(n+3)!2!} \Leftrightarrow 5(n+5)=\frac{(n+5)(n+4)}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10(n+5)-(n+5)(n+4)=0 \Leftrightarrow (n+5)(10-n-4)=0 \Leftrightarrow n=-5 \vee n=6$$

Como $n\in\mathbb{N}$, tem-se $n=6$.

Resposta: Transferiram-se seis bolas da caixa B para a caixa A.

2. Sendo $x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{3\pi}{4}\right]$, então $\frac{1}{2}\le \sin x\le 1$, ou seja, $\frac{1}{2}\le f(x)\le 1$.

Sendo g uma função crescente, tem-se $e^{\frac{1}{2}}\le e^{f(x)}\le e$. Então, $D'_h=\left[\sqrt{e}, e\right]$.

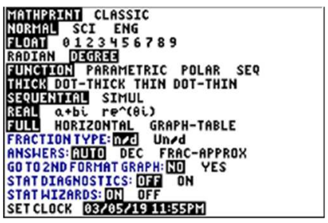
Assim $a=\sqrt{e}\approx 1,65$ e $b=e\approx 2,72$.

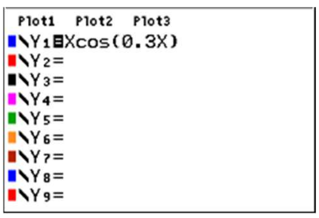
Resposta: Opção **(B)** $a=1,65 \wedge b=2,72$

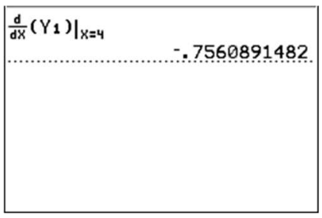
3. Verificar que a configuração da calculadora está em radianos.

Inserir a expressão da função e, em seguida, calcular a derivada da função para $x=4$.

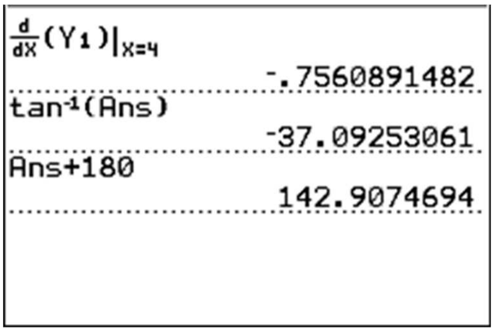
Configurar a calculadora em graus para obter a inclinação.







Atendendo a que o valor de $f'(4)<0$, é necessário considerar a solução que corresponde a uma amplitude entre 90º e 180º (ângulo do 2.º quadrante).



Assim, obtém-se, 142,9º, aproximadamente.

Resposta: Opção **(A)**

4.1. Sabe-se que:

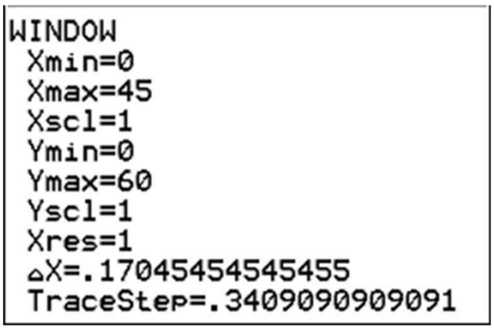
- $f(t)=\dfrac{k}{1+2,6\mathrm{e}^{-0,10t}}$, $t\in[0,45]$ e $k\in\mathbb{R}^+$
- $g(t)=28\sin(0,04t)$, $t\in[0,45]$

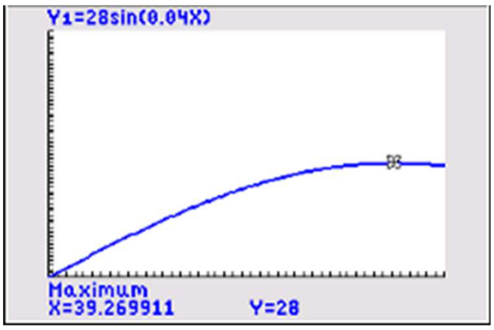
Para $t=0$, tem-se $f(0)=\dfrac{k}{3,6}$ e $g(0)=0$.

$$g(0)=f(0)-15,6 \Leftrightarrow 0=\frac{k}{3,6}-15,6 \Leftrightarrow k=56,16$$

Resposta: $k=56,16$

4.2. **a)**





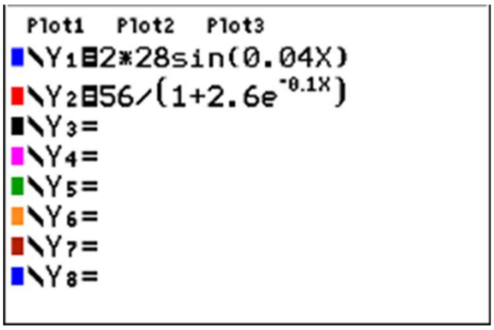
Para $t=39,2699$, obtém-se $f(39,2699)\approx 53,2711$.

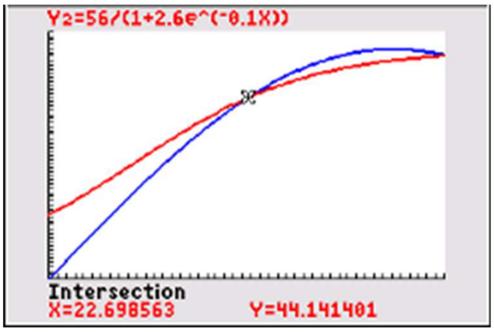
Designando por T a temperatura ambiente, tem-se $28=53,2711-T$, ou seja, $T\approx 25,3$.

Resposta: A temperatura ambiente é de 25,3 ºC.

4.2. **b)** $f(t)=2(f(t)-g(t)) \Leftrightarrow f(t)=2f(t)-2g(t) \Leftrightarrow f(t)=2g(t)$

Resolvendo graficamente, obtém-se:





$t \approx 22,699$ min, ou seja, 22 min e 42 s

Resposta: Ao fim de 22 min e 42 s.

FIM (Caderno 1)

CADERNO 2

5. Há apenas um elemento central, o $2a$. Então, o número de elementos dessa linha é ímpar.

Daqui resulta que o valor de n é um número par.

Resposta: (C) 2022

6. $\log_a\left(\sqrt{ab}\right)=5 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_a(ab)=5 \Leftrightarrow \log_a(ab)=10 \Leftrightarrow \log_a a+\log_a b=10 \Leftrightarrow \log_a b=9$

Assim, tem-se $\log_a b=9$. **(1)**

$$\log_b\left(a^2b\right)=\log_b\left(a^2\right)+1=2\log_b(a)+1=2\times\frac{\log_a(a)}{\log_a(b)}+1=\frac{2}{\log_a(b)}+1$$

Recorrendo ao valor obtido em **(1)**, tem-se:

$$\log_b\left(a^2b\right)=\frac{2}{\log_a(b)}+1=\frac{2}{9}+1=\frac{11}{9}$$

Resposta: Opção **(D)** $\frac{11}{9}$

7.1. Pretende-se provar que a equação $f'(x)=-2$ é possível no intervalo $\left]\frac{1}{\mathrm{e}},1\right[$.

A função f' é contínua no domínio, ou seja, em $\mathbb{R}^+$ e, em particular, em $\left[\frac{1}{\mathrm{e}},1\right]$, por ser a soma e produto de funções contínuas em $\mathbb{R}^+$.

$$f'\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=\frac{2}{\frac{1}{\mathrm{e}}}\ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)+\frac{1}{\frac{1}{\mathrm{e}}}=2\mathrm{e}\times(-1)+\mathrm{e}=-\mathrm{e}$$

$$f'(1)=\frac{2}{1}\ln(1)+\frac{1}{1}=2\times0+1=1$$

Recorrendo ao Teorema de Bolzano, atendendo a que f' é contínua em $\left[\frac{1}{\mathrm{e}},1\right]$ e $f'\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)<-2<f'(1)$, conclui-se que $\exists c\in\left]\frac{1}{\mathrm{e}},1\right[: f'(c)=-2$, tal como se pretendia provar.

Assim, o ponto P tem de coordenadas $(c, f(c))$, $c\in\left]\frac{1}{\mathrm{e}},1\right[$ em que $f'(c)=-2$, ou seja, o declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto P é -2.

7.2. As abcissas de A e de B são zeros da função f.

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \ln^2(x)-\ln\left(\frac{1}{x}\right)=0 \wedge x>0 \Leftrightarrow \ln^2(x)+\ln(x)=0 \wedge x>0 \Leftrightarrow$$

$$\ln(x)\left(\ln(x)+1\right)=0 \wedge x>0 \Leftrightarrow \left(\ln(x)=0 \vee \ln(x)=-1\right) \wedge x>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=1 \vee x=\mathrm{e}^{-1}$$

$A\left(\mathrm{e}^{-1},0\right)$ e $B(1,0)$

C é ponto de inflexão do gráfico de f.

$$f''(x)=\left(\frac{2}{x}\ln(x)+\frac{1}{x}\right)'=-\frac{2}{x^2}\ln(x)+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^2}=-\frac{2}{x^2}\ln(x)+\frac{1}{x^2}$$

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow -\frac{2}{x^2}\ln(x)+\frac{1}{x^2}=0 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2}\left(-2\ln(x)+1\right)=0 \Leftrightarrow \ln(x)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$$

	0		$\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$	$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$
f		$\cup$	$f\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right)$	$\cap$

$$f\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right)=\ln^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right)+\ln\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$$

O ponto C tem de coordenadas $\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}},\frac{3}{4}\right)$.

A área do triângulo $[ABC]$ é dada por $\dfrac{\overline{AB}\times\frac{3}{4}}{2}$.

$$\frac{\overline{AB}\times\frac{3}{4}}{2}=\frac{\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)}{8}\times 3=\frac{3(\mathrm{e}-1)}{8\mathrm{e}}$$, como se pretendia provar.

8.1. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{x+1}-1}{x^2-1}=\dfrac{0-1}{+\infty}=0$

A reta de equação $y=0$

Resposta: A assíntota horizontal tem de equação $y=0$.

8.2.

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1-\cos^2 x}{-2x\sin x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin^2 x}{-2x\sin x} = -\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin x}{x} = -\dfrac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = -\dfrac{1}{2}$

A função *f* é contínua em $x=0$.

- $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^{-1}} \dfrac{e^{x+1}-1}{x^2-1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to -1^{-1}} \dfrac{e^{x+1}-1}{(x+1)(x-1)}$

Fazendo $x+1=y$: se $x\to -1$, então $y\to 0$.

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{e^y-1}{y(y-2)} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{e^y-1}{y} \times \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{1}{y-2} = 1\times\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(-1) = -\dfrac{1}{2}$

A função *f* é contínua em $x=-1$.

Resposta: A função é contínua em $x=0$ e em $x=-1$.

9.1. $f'(x) = (\cos(2x) - 2\sin x)' = -2\sin(2x) - 2\cos x = -2(2\sin x\cos x) - 2\cos x$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2(2\sin x\cos x) - 2\cos x = 0 \Leftrightarrow -2\cos x(2\sin x + 1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \sin x = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \vee x = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi + 2k\pi}{2} \vee x = \dfrac{-\pi + 12k\pi}{6} \vee x = \dfrac{7\pi + 12k\pi}{6},\ k\in\mathbb{Z}$

Como $x\in[0, 2\pi]$, tem-se: $x = \dfrac{\pi}{2} \vee x = \dfrac{3\pi}{2} \vee x = \dfrac{11\pi}{6} \vee x = \dfrac{7\pi}{6}$

O menor dos zeros da derivada é $\dfrac{\pi}{2}$.

$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \cos(\pi) - 2\sin\dfrac{\pi}{2} = -1 - 2 = -3$

As coordenadas do ponto *A* são $\left(\dfrac{\pi}{2}, -3\right)$.

Resposta: $A\left(\dfrac{\pi}{2}, -3\right)$

9.2. $\forall x \in [0, 2\pi],\ f(x) = -2\sin^2(x) - 2\sin(x) + 1$

$f(x) = \cos(2x) - 2\sin x = \cos^2 x - \sin^2 x - 2\sin x = 1 - \sin^2 x - \sin^2 x - 2\sin x$

$f(x) = -2\sin^2 x - 2\sin x + 1$, como se pretendia demonstrar.

$$f(x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow -2\sin^2 x - 2\sin x + 1 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 4\sin^2 x + 4\sin x - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \frac{-4 \pm \sqrt{16+48}}{8} \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \vee \sin x = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \wedge x \in [0, 2\pi] \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} \vee x = \frac{5\pi}{6}$$

Resposta: Conjunto-solução: $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$

10. Sabe-se que:

- $\beta = \alpha + \theta$. Então, $\theta = \beta - \alpha$.
- $\tan(\alpha) = m$
- $\tan(\beta) = m'$

$$\tan(\theta) = \tan(\beta - \alpha) = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\cos(\beta - \alpha)} = \frac{\sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha}{\cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha} =$$

$$= \frac{\frac{\sin\beta\cos\alpha}{\cos\beta\cos\alpha} - \frac{\cos\beta\sin\alpha}{\cos\beta\cos\alpha}}{1 + \frac{\sin\beta\sin\alpha}{\cos\beta\cos\alpha}} = \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1 + \tan\beta\tan\alpha} = \frac{m' - m}{1 + m'm}$$

FIM (Caderno 2)