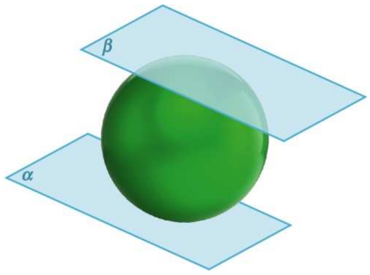
1. Seja $T(x, y, z)$ o ponto de tangência do plano α à esfera e $P(-3\ ,\ 4\ ,\ 0)$ o ponto de tangência do plano β.

O centro da esfera $O(0,0,0)$ é o ponto médio de [TP].



Assim:

$$\begin{cases} \dfrac{x-3}{2}=0 \\ \dfrac{y+4}{2}=0 \\ \dfrac{z+0}{2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-4 \\ z=0 \end{cases}$$

As coordenadas do ponto T são $(3,-4,0)$.

O vetor $\overrightarrow{TO}=O-T=(-3,4,0)$ é normal ao plano α.

O plano α é definido por uma equação do tipo: $-3x+4y+d=0$.

O ponto T pertence a α, pelo que $-3\times3+4\times(-4)+d=0$, ou seja, $d=25$.

Assim, a equação do plano α é: $-3x+4y+25=0$

Resposta: Opção **(C)** $-3x+4y+25=0$

2.

2.1. Os pontos A, B e C definem um plano se forem não colineares.

Uma equação da reta AB é: $(x, y, z)=A+k\,\overrightarrow{AB}\ ,\ k\in\mathbb{R}$

$(x, y, z)=(1,-1,1)+k(-1,2,-3)\ ,\ k\in\mathbb{R}$

Qualquer ponto da reta AB é do tipo $(1-k,-1+2k,1-3k)\ ,k\in\mathbb{R}$.

O ponto C pertence à reta AB se:

$$\begin{cases} 2=1-k \\ m+2=-1+2k \\ 4=1-3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=-1 \\ m=-5 \end{cases}$$

Os pontos A, B e C são colineares se $m=-5$ e definem um plano se $m\neq-5$.

Resposta: $m\in\mathbb{R}\setminus\{-5\}$

2.2 O ângulo BAC é obtuso se e só se $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} < 0$.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} < 0 \Leftrightarrow (-1,2,-3)\cdot(1,m+3,3) < 0 \Leftrightarrow -1+2m+6-9<0 \Leftrightarrow m<2$$

Resposta: $m \in \left]-\infty, 2\right[$

3. $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n, \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Sabe-se que: $\begin{cases} u_{n+1} - u_n = 44 \\ u_{n+1} + u_n = 970 \end{cases}$

$$\begin{cases} u_{n+1} - u_n = 44 \\ u_{n+1} + u_n = 970 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2n = 44 \\ u_n + 2n + u_n = 970 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 22 \\ 2u_n + 44 = 970 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 22 \\ u_n = 463 \end{cases}$$

Como $u_{n+1} = u_n + 2n$, então $u_{23} = 463 + 44 = 507$.

Os termos consecutivos são $u_{22} = 463$ e $u_{23} = 507$.

Resposta: Os termos consecutivos que satisfazem as condições são 463 e 507, sendo os termos de ordens 22 e 23, respetivamente.

4. $u_5 = u_3 + 2r$

$$2r = u_5 - u_3 \Leftrightarrow 2r = \log_2(3k) - \log_2(k) \Leftrightarrow 2r = \log_2\left(\frac{3k}{k}\right) \Leftrightarrow r = \frac{1}{2}\log_2 3 \Leftrightarrow r = \log_2\sqrt{3}$$

Resposta: Opção **(D)** $\log_2\sqrt{3}$

5. Sabe-se que:

- $P(A \cap B) = P\left(\overline{A \cup B}\right)$
- $P(A) = 0,34$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Atendendo a que $P(A \cap B) = P\left(\overline{A \cup B}\right)$, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P\left(\overline{A \cup B}\right)$.

Mas, $P\left(\overline{A \cup B}\right) = 1 - P(A \cup B)$, pelo que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - \left(1 - P(A \cup B)\right)$.

Daqui resulta que $P(A) + P(B) = 1$.

Como $P(A) = 0,34$, então $P(B) = 1 - 0,34 = 0,66$.

Resposta: $P(B) = 0,66$

6.

Sistema anterior

Novo sistema

6.1. O número possível de matrículas no sistema anterior é:

$$10^2 \times 23^2 \times 10^2 = 5\ 290\ 000$$

O número possível de matrículas no novo sistema é:

$$26^2 \times 10^2 \times 26^2 = 45\ 697\ 600$$

$45\ 697\ 600 - 5\ 290\ 000 = 40\ 407\ 600$

Resposta: Opção **(A)** $\quad 40\ 407\ 600$

6.2. Número de casos possíveis: $26^2 \times 10^2 \times 26^2 = 45\ 697\ 600$

Número de casos favoráveis:

Qualquer uma das 26 letras pode repetir-se três vezes. A outra letra terá as restantes possibilidades, ou seja, 25.

Dos quatro lugares para as letras há ${}^4C_3$ lugares para as letras iguais.

Assim, o número de casos favoráveis é dado por: $26\,{}^4C_3 \times 25 \times 10^2 = 260\ 000$

Seja P a probabilidade pedida.

$$P = \frac{260\ 000}{45\ 697\ 600} \approx 0{,}006$$

Resposta: $0{,}006$

7.

7.1. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(4+h) - f(4)}{h} = f'(4)$

$$f'(x) = \left(4x + \ln(x-3)\right)' = 4 + \frac{1}{x-3}$$

$$f'(4) = 4 + \frac{1}{4-3} = 5$$

Resposta: Opção **(B)**

7.2. $f'(x)=\left(4x+\ln(x-3)\right)'=4+\dfrac{1}{x-3}\ ;\ x\in\left]3,+\infty\right[$

$\lim\limits_{x\to 3^+}\left(4+\dfrac{1}{x-3}\right)=4+(+\infty)=+\infty$. A reta $x=3$ é assíntota vertical ao gráfico de *f'*.

$\lim\limits_{x\to +\infty}\left(4+\dfrac{1}{x-3}\right)=4+0=4$. A reta $y=4$ é assíntota horizontal ao gráfico de *f'*.

As coordenadas do ponto P são $(3,4)$.

Resposta: $P(3,4)$

8.

8.1. $f(x)=x\ln x-x$

$$f'(\mathrm{e})=\lim_{h\to 0}\frac{f(\mathrm{e}+h)-f(\mathrm{e})}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(\mathrm{e}+h)\ln(\mathrm{e}+h)-(\mathrm{e}+h)-\mathrm{e}\ln\mathrm{e}+\mathrm{e}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(\mathrm{e}+h)\left(\ln(\mathrm{e}+h)-1\right)}{h}\overset{\frac{0}{0}}{=}$$

Substituição:

Seja $\ln(\mathrm{e}+h)-1=y$. Se $h\to 0$, então $y\to 0$.

Se $\ln(\mathrm{e}+h)-1=y$, então $\ln(\mathrm{e}+h)=y+1$, ou seja, $\mathrm{e}+h=\mathrm{e}^{y+1}$.

Daqui resulta que $h=\mathrm{e}^{y+1}-\mathrm{e}$. Assim:

$$\lim_{h\to 0}\frac{(\mathrm{e}+h)\left(\ln(\mathrm{e}+h)-1\right)}{h}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{y\to 0}\frac{\mathrm{e}^{y+1}\times y}{\mathrm{e}^{y+1}-\mathrm{e}}=\lim_{y\to 0}\left(\frac{\mathrm{e}^{y+1}}{\mathrm{e}}\times\frac{y}{\mathrm{e}^{y}-1}\right)=\lim_{y\to 0}\mathrm{e}^{y}\times\frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{y}-1}{y}}=1\times\frac{1}{1}=1$$

Resposta: $f'(\mathrm{e})=1$

8.2 $f(x)=0\ \wedge\ x>0\Leftrightarrow x\ln x-x=0\ \wedge\ x>0\Leftrightarrow(\ln x-1)=0\Leftrightarrow x=\mathrm{e}$

$a=\mathrm{e}$

$\overline{AB}=b-a=2\mathrm{e}-\mathrm{e}=\mathrm{e}$

As coordenadas do ponto C são $\left(2\mathrm{e},f(2\mathrm{e})\right)$.

$f(2\mathrm{e})=2\mathrm{e}\ln(2\mathrm{e})-2\mathrm{e}$

$\overline{BC}=2\mathrm{e}\ln(2\mathrm{e})-2\mathrm{e}=2\mathrm{e}(\ln 2+\ln e)-2\mathrm{e}=2\mathrm{e}\ln 2+2\mathrm{e}-2\mathrm{e}=2\mathrm{e}\ln 2$

Área do triângulo [*ABC*]: $\dfrac{\overline{AB}\times\overline{BC}}{2}=\dfrac{\mathrm{e}\times 2\mathrm{e}\ln 2}{2}=\mathrm{e}^2\ln 2$

9.

9.1. Se $x<0$, $f'(x)=\left(1-\cos(3x)\right)'=3\sin(3x)$.

O declive da reta *r* é igual a $f'\left(-\frac{\pi}{6}\right)=3\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-3$.

O declive da reta *s* é o simétrico do inverso do declive da reta *r*, ou seja, $\frac{1}{3}$.

Resposta: Opção **(D)** $\frac{1}{3}$

9.2. No intervalo $\left[-\frac{4\pi}{3}, -\pi\right]$, $f(x)=1-\cos(3x)$.

No intervalo $\left[-\frac{4\pi}{3},-\pi\right]$, a equação $f(x)=\sin x$ é equivalente a $1-\cos(3x)=\sin x$.

$1-\cos(3x)=\sin x \Leftrightarrow 1-\cos(3x)-\sin x=0$

Seja g a função definida por $g(x)=1-\cos(3x)-\sin x$.

- A função g é contínua em $\left[-\frac{4\pi}{3},-\pi\right]$.
- $g\left(-\frac{4\pi}{3}\right)=1-\cos(-4\pi)-\sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right)=1-1-\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$
- $g(-\pi)=1-\cos(-3\pi)-\sin(-\pi)=1+1-0=2$

Então:

- A função g contínua em $\left[-\frac{4\pi}{3},-\pi\right]$.
- $g\left(-\frac{4\pi}{3}\right)\times g(-\pi)<0$

Recorrendo ao Corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy, conclui-se que:

$\exists c\in \left]-\frac{4\pi}{3},-\pi\right[: g(c)=0$

Mas, $g(c)=0 \Leftrightarrow f(c)=\sin c$.

A equação $f(x)=\sin x$ é possível no intervalo $\left]-\frac{4\pi}{3},-\pi\right[$.

9.3. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 2\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$

Se $\frac{1}{x} = y$, quando $x \to +\infty$, então $y \to 0$.

Assim, $2\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 2\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin y}{y} = 2$.

Resposta: 2

10. $L(t) = \dfrac{96}{1+3e^{-0,5t}}$

10.1. **a)** $L(0) = \dfrac{96}{1+3} = 24$

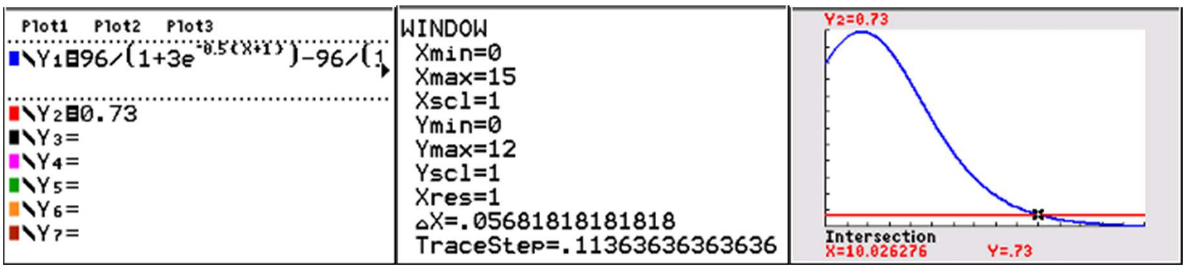
Na sessão de apresentação do livro foram vendidos 2400 exemplares.

b) $L(3) - L(2) \approx 11,87$

Durante o terceiro mês após o lançamento do livro, foram vendidos 1187 exemplares.

10.2. No contexto apresentado, a expressão $L(t+1) - L(t)$ representa o número de livros vendidos durante o mês seguinte a terem passado *t* meses após a sessão de apresentação do livro.

$$\frac{96}{1+3e^{-0,5(t+1)}} - \frac{96}{1+3e^{-0,5t}} = 0,73$$



$t \approx 10$; $t+1 = 11$

Durante o 11.º mês após a apresentação do livro, foram vendidos 73 livros.

O número total de livros, em centenas, vendidos até ao fim do 11.º mês é dado por:

$L(11)=\dfrac{96}{1+3e^{-5,5}}\approx 94,84$ (9484 livros)

Resposta: Aproximadamente 9484 livros.

11.

11.1. $|z-\mathrm{i}|=2$

$|z-\mathrm{i}|=2 \Leftrightarrow |x+2\mathrm{i}-\mathrm{i}|=2 \Leftrightarrow |x+\mathrm{i}|=2 \Leftrightarrow x^2+1=4 \Leftrightarrow x^2=3 \Leftrightarrow x=\sqrt{3} \vee x=-\sqrt{3}$

Resposta: $x\in\left\{-\sqrt{3},\sqrt{3}\right\}$

11.2. $z=\sqrt{12}+2\mathrm{i}$

Seja θ argumento de z e $\theta\in[0,\ 2\pi[$.

$\tan\theta=\dfrac{2}{\sqrt{12}}=\dfrac{2}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ e o afixo de z pertence ao 1.º quadrante. Então, $\theta=\dfrac{\pi}{6}$.

$|z|=\left|\sqrt{12}+2\mathrm{i}\right|=\sqrt{12+4}=4$

$z=4e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$

$z^n=4^n e^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{6}}$

z^n é um número real negativo se e só se $\dfrac{n\pi}{6}=\pi+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

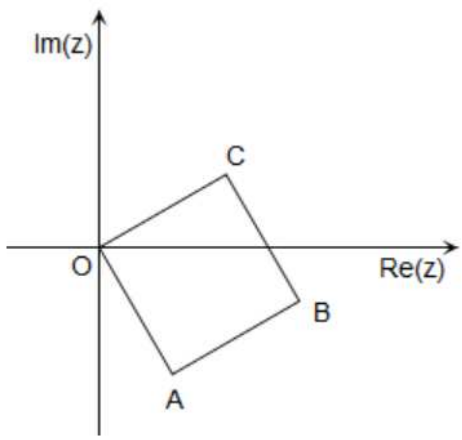
$\dfrac{n\pi}{6}=\pi+2k\pi \Leftrightarrow n=6+12k$

O menor número natural que satisfaz a condição é 6.

Resposta: 6

12.

12.1. $|z_C|=\left|\sqrt{3}+\mathrm{i}\right|=\sqrt{3+1}=2$



Seja θ o argumento positivo mínimo de z_C .

$\tan\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ e o afixo de z_C pertence ao 1.º quadrante.

Então, $\theta=\dfrac{\pi}{6}$.

$[OB]$ é uma das diagonais de um quadrado de lado 2.

$\overline{OB} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$

Assim, $|z_B| = 2\sqrt{2}$.

Sabe-se que $B\hat{O}C = \frac{\pi}{4}$.

Seja α o argumento positivo mínimo de z_B.

$\alpha = 2\pi - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = 2\pi - \frac{\pi}{12} = \frac{23\pi}{12}$

z_B na forma trigonométrica é representado por $2\sqrt{2}\,e^{i\frac{23\pi}{12}}$.

Resposta: $z_B = 2\sqrt{2}\,e^{i\frac{23\pi}{12}}$

12.2. $z_A = 2\,e^{i\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right)} = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$ e $z_C = 2\,e^{i\frac{\pi}{6}}$

$z = 2e^{i\theta}$, $\theta \in \left]-\pi, \pi\right]$

O afixo de z pertence ao quadrado se $\theta \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right]$.

FIM