1.

1.1. $f'(x)=\left(\mathrm{e}^{-x}-x+1\right)'=-\mathrm{e}^{-x}-1$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)+2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\mathrm{e}^{-x}+1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\left(\mathrm{e}^{-x}-1\right)}{x}.$$

Se $-x=y$, tem-se:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{-x}-1}{-x}=\lim_{y\to 0}\frac{\mathrm{e}^{y}-1}{y}=1$$

Resposta: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)+2}{x}=1$

1.2. $f'(x)=f''(x)-\mathrm{e}^{x}$

$f'(x)=-\mathrm{e}^{-x}-1$

$f''(x)=\left(-\mathrm{e}^{-x}-1\right)'=\mathrm{e}^{-x}$

$f'(x)=f''(x)-\mathrm{e}^{x}\Leftrightarrow -\mathrm{e}^{-x}-1=\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{x}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mathrm{e}^{x}-1-2\mathrm{e}^{-x}=0\Leftrightarrow \mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{x}-2=0\Leftrightarrow \mathrm{e}^{x}=\dfrac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mathrm{e}^{x}=2\vee \mathrm{e}^{x}=-1\Leftrightarrow \mathrm{e}^{x}=2\Leftrightarrow x=\ln 2$

Resposta: $\text{C.S.}=\{\ln 2\}$

1.3. Ponto de interseção do gráfico de *f* com *Oy*: $A\left(0,f(0)\right)$

$A(0,2)$

Declive da reta *r*: $f'(0)=-2$

Equação reduzida da reta *r*: $y=-2x+2$

Ponto de interseção do gráfico de f' com *Oy*: $B\left(0,f'(0)\right)$

$B(0,-2)$

Declive da reta *t*: $f''(0)=1$

Equação reduzida da reta *t*: $y=x-2$

Interseção das retas r e t:

$$\begin{cases} y=-2x+2 \\ y=x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=-2x+2 \\ y=x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{4}{3} \\ y=-\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Resposta: As coordenadas do ponto P são $\left(\dfrac{4}{3},-\dfrac{2}{3}\right)$.

2.

2.1. $f(x)=x^2-\ln\left(\dfrac{2}{x}\right)=x^2-\ln 2+\ln x$

$f'(x)=\left(x^2-\ln 2+\ln x\right)'$

$f'(x)=2x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{2x^2+1}{x}$

2.2. O declive da reta tangente é mínimo quando a derivada tem um mínimo.

$f''(x)=\left(\dfrac{2x^2+1}{x}\right)'$

$f''(x)=\dfrac{4x^2-\left(2x^2+1\right)}{x^2}=\dfrac{2x^2-1}{x^2}$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{2x^2-1}{x^2}=0$

$\dfrac{2x^2-1}{x^2}=0 \wedge x>0 \Leftrightarrow x^2=\dfrac{1}{2} \ \wedge \ \ x>0 \Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \ \wedge \ x>0$

x	$-\infty$	$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$		0		$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
$f''(x)$					$-$	0	$+$
$f'(x)$					$\searrow$		$\nearrow$

A primeira derivada atinge o mínimo quando $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Resposta: A abcissa do ponto P é $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

3.

3.1. $f(x)=x\ln\left(1+\frac{k}{x}\right)-x$

$$f(1)=\ln\left(1+\frac{k}{1}\right)-1=\ln(1+k)-1=\ln(1+k)-\ln(\mathrm{e})=\ln\left(\frac{1+k}{\mathrm{e}}\right)$$

Resposta: (C) $\ln\left(\frac{1+k}{\mathrm{e}}\right)$

3.2. $y=-x+k$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-(-x+k)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x\ln\left(1+\frac{k}{x}\right)-x-(-x+k)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x\ln\left(1+\frac{k}{x}\right)-k\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(1+\frac{k}{x}\right)^x-k\right)=-k+\ln\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x=-k+\ln\left(e^k\right)=-k+k=0$$

Como $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(-x+k)\right)=0$, conclui-se que a reta $y=-x+k$ é assíntota ao gráfico de *f*.

4.

4.1. $B(t)=36\ 257\,\mathrm{e}^{0{,}075t}$

$t=0$ corresponde ao dia 7 de fevereiro e $t=4$ ao dia 11 de fevereiro.

$B(4)=36\,257\times\mathrm{e}^{0{,}075\times4}$

$B(4)\approx 48\ 942$ que corresponde ao valor dado pelo modelo para o número de pessoas contagiadas e confirmadas até ao final do dia 11 de fevereiro.

4.2. Valor real no final do dia 14: 67 100

Valor dado pelo modelo da Sofia: $S(7)=\dfrac{88\ 960}{1+1{,}84\mathrm{e}^{-0{,}24\times7}}\approx 66\ 243$

Valor dado pelo modelo do Bernardo: $B(7)=36\ 257\times\mathrm{e}^{0{,}075\times7}\approx 61\ 291$

O valor encontrado a partir do modelo da Sofia é mais próximo do real do que o valor dado pelo modelo do Bernardo.

5.

5.1. Se $\alpha \in \mathbb{R}^+$, então $-\alpha \in \mathbb{R}^-$.

$$f(\alpha)\times f(-\alpha)=\frac{\sin(2\alpha)}{\alpha}\times(-\alpha\cos(2\alpha))=-\sin(2\alpha)\cos(2\alpha)=$$

$$=-\frac{1}{2}(2\sin(2\alpha)\cos(2\alpha))=-\frac{1}{2}\sin(4\alpha)$$

Resposta: (D) $\quad -\dfrac{\sin(4\alpha)}{2}$

5.2. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin(2x)}{x}=2\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin(2x)}{2x}$

Se $2x=y$, tem-se:

$$2\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(2x)}{2x}=2\lim_{y\to 0^+}\frac{\sin y}{y}=2\times 1=2$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} x\cos(2x)=0$$

Não existe limite em $x=0$ e, dado que $0\in D_f$, então f não é contínua em $x=0$.

5.3. Seja x a abcissa do ponto A.

$$f(x)=0 \wedge x\in[-\pi,0[\ \Leftrightarrow x\cos(2x)=0\wedge x\in[-\pi,0[$$

$$\cos(2x)=0\wedge x\in[-\pi,0[\ \Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\ \wedge x\in[-\pi,0[\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi+2k\pi}{4},\ k\in\mathbb{Z}\ \wedge x\in[-\pi,0[\ \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}$$

O ponto A tem coordenadas $\left(-\dfrac{\pi}{4},0\right)$.

Resposta: $\left(-\dfrac{\pi}{4},0\right)$

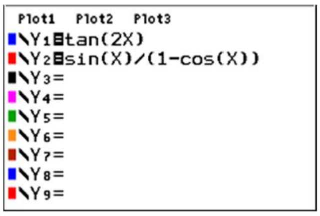
6. O ponto P tem coordenadas $(\cos\theta,\sin\theta)$.

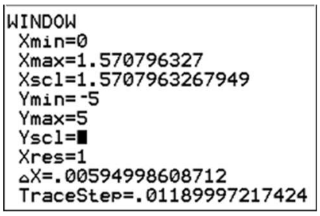
$$\beta=2\theta \quad \text{e} \quad \tan\beta=\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$$

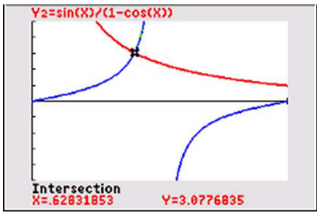
Para determinar θ, resolve-se graficamente a equação $\tan(2\theta)=\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$.

No menu *Funções*, inserem-se as expressões $\tan(2\theta)$ e $\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$ e define-se uma janela adequada, atendendo a que $\theta \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Visualizam-se os gráficos.







Identifica-se o ponto de interseção dos gráficos das funções no respetivo domínio.

θ corresponde à abcissa do ponto de interseção.

$\theta \approx 0,6283$

A abcissa do ponto P é dada por $\cos\theta$.

Tomando para θ o valor encontrado, obtém-se $\cos(0,6283) \approx 0,81$.

A abcissa de P é, aproximadamente, 0,81.