CADERNO 1
(É permitido o uso de calculadora gráfica.)

1.1. Conjunto dos números primos que aparecem na numeração das bolas: $\{2,3,5,7,11,13\}$.

Número de casos favoráveis: ${}^{6}A_3 \times 12!$

Número de casos possíveis: $15!$

Seja p a probabilidade pedida.

$$p = \frac{{}^{6}A_3 \times 12!}{15!} = \frac{6 \times 5 \times 4}{13 \times 14 \times 15} = \frac{120}{2730}$$

$p \approx 0,044$

Resposta: $0,044$

1.2. Decomposição do número 30 em fatores primos: $30 = 2 \times 3 \times 5$

O número 1 é o elemento neutro da multiplicação.

Assim: $30 = 1 \times 2 \times 3 \times 5$

Como pretendemos apenas três bolas, uma para cada vértice há quatro escolhas:

$2 - 3 - 5$ ou $1 - 6 - 5$ ou $1 - 10 - 3$ ou $1 - 2 - 15$

Número de casos favoráveis: $4 \times 3! \times 12!$

Número de caso possíveis: $15!$

Seja p a probabilidade pedida.

$$p = \frac{4 \times 3! \times 12!}{15!} = \frac{4 \times 6}{13 \times 14 \times 15} = \frac{24}{2730} = \frac{4}{455}$$

Resposta: $\frac{4}{455}$

2. Há cinco bolas com número ímpar e $n-5$ bolas com número par.

Para a soma de dois números ser ímpar, um é par e o outro é ímpar.

A probabilidade de retirar duas bolas e a soma dos números ser ímpar é $\frac{{}^{5}C_1 \times {}^{n-5}C_1}{{}^{n}C_2}$.

Assim, temos: $\frac{{}^{5}C_1 \times {}^{n-5}C_1}{{}^{n}C_2} = \frac{5}{9} \Leftrightarrow \frac{5 \times (n-5)}{\frac{n!}{2!(n-2)!}} = \frac{5}{9} \Leftrightarrow \frac{2(n-5)}{n(n-1)} = \frac{1}{9} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 18(n-5) = n^2 - n \Leftrightarrow n^2 - 19n + 90 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{19 \pm \sqrt{361-360}}{2} \Leftrightarrow n = 9 \vee n = 10$$

Como o número de bolas com número ímpar é diferente do número de bolas com número par, conclui-se que $n = 9$.

A caixa tem cinco bolas com número ímpar e quatro bolas com número par.

Retirar ao acaso três bolas e a soma ser um número par ocorre quando há duas bolas com número ímpar e uma com número par ou três bolas com número par.

Número de casos favoráveis: ${}^5C_2 \times {}^4C_1 + {}^4C_3 = 44$

Número de casos possíveis: ${}^9C_3 = 84$

Seja p a probabilidade pedida.

$$p = \frac{44}{84} = \frac{11}{21}$$

Resposta: $\frac{11}{21}$

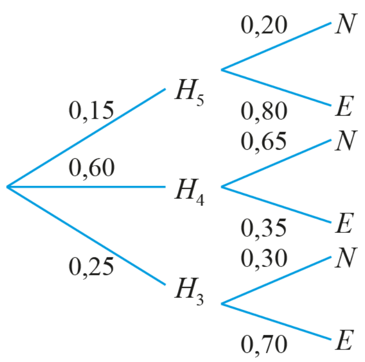
3. Consideram-se os acontecimentos:

H_5: "Escolher hotel de 5 estrelas." H_4: "Escolher hotel de 4 estrelas."

H_3: "Escolher hotel de 3 estrelas." N: "Escolher hóspede nacional."

E: "Escolher hóspede estrangeiro."

Sabe-se que:



- $P(H_5) = 0{,}15$
- $P(H_4) = 0{,}60$
- $P(H_3) = 1 - (0{,}15 + 0{,}60) = 0{,}25$
- $P(N|H_5) = 0{,}20$. Então, $P(E|H_5) = 1 - 0{,}20 = 0{,}8$.
- $P(E|H_4) = 0{,}35$. Então, $P(N|H_4) = 1 - 0{,}35 = 0{,}65$.
- $P(E|H_3) = 0{,}70$. Então, $P(N|H_3) = 1 - 0{,}70 = 0{,}30$.

3.1. $P(H_5 \cap E) = P(H_5) \times P(E|H_5) = 0{,}15 \times 0{,}80 = 0{,}12$

Resposta: 12%

3.2.
$$P(H_3|N) = \frac{P(H_3 \cap N)}{P(N)} = \frac{P(H_3 \cap N)}{P(H_5 \cap N) + P(H_4 \cap N) + P(H_3 \cap N)} =$$
$$= \frac{0{,}25 \times 0{,}30}{0{,}15 \times 0{,}20 + 0{,}60 \times 0{,}65 + 0{,}25 \times 0{,}30} = \frac{5}{33}$$

Resposta: $\frac{5}{33}$

CADERNO 2

(Não é permitido o uso de calculadora.)

4.1. Há 10 imagens diferentes. Assim, há 10 casos favoráveis.

O número de casos possíveis é: ${}^{10}A'_3 = 10^3$

Seja p a probabilidade pedida.

$$p = \frac{10}{10^3} = 0,01$$

$p = 1\%$.

Resposta: (C) 1%

4.2. Sendo a imagem do meio um Pai Natal, o 2.º prémio pode ocorrer se:

A primeira imagem é um Pai Natal e a terceira não é um Pai Natal.

Ou

A primeira imagem não é um Pai Natal e a terceira é Pai Natal.

Ou

A primeira e a terceira imagens são iguais e diferentes de um Pai Natal.

Número de casos favoráveis: $9+9+9=27$

Número de casos possíveis: ${}^{10}A'_2 = 10^2$

Seja p a probabilidade pedida.

$$p = \frac{27}{100} = 0,27$$

Resposta: 27%

5.1. Sabe-se que $P\left(A \cap \overline{B}\right) = a$ e $P\left(\overline{A \cup B}\right) = b$.

Como $A = A \cap \Omega = A \cap \left(B \cup \overline{B}\right)$, então $P(A) = P(A \cap B) + P\left(A \cap \overline{B}\right)$, ou seja,

$P(A) = P(A \cap B) + a$ **(1)**.

Sabe-se que $P\left(\overline{A \cup B}\right) = b$, ou seja, $P(A \cup B) = 1 - b$ **(2)**

Mas, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Considerando (1) e (2), tem-se:

$1 - b = P(A \cap B) + a + P(B) - P(A \cap B)$

Daqui resulta que $P(B) = 1 - (a+b)$, como se queria demonstrar.

5.2. Sejam A e B os acontecimentos:

A: "O congressista fala inglês." B: "O congressista fala francês."

Sabe-se que $P\left(A \cap \overline{B}\right) = 0,25$ e $P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = P\left(\overline{A \cup B}\right) = 0,4$.

Pelo resultado de **5.1.**: $P(B) = 1 - \left(P\left(A \cap \overline{B}\right) + P\left(\overline{A \cup B}\right)\right)$

Assim, $P(B) = 1 - (0,25 + 0,4) = 0,35$.

Resposta: $0,35$

6. $x_n = \dfrac{n-1}{n} = 1 - \dfrac{1}{n}$

$\forall n \in \mathbb{N},\ x_n < 1$

$\lim(x_n) = \lim \dfrac{n-1}{n} = \lim\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) = 1$

$\lim f(x_n) = \lim \dfrac{\sqrt{x_n}}{x_n - 1} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$

Resposta: (C) $-\infty$

7. Área do triângulo [ABC]: $\dfrac{\overline{AB} \times (a-1)}{2} = \dfrac{3(a-1)}{2}$

Área do triângulo [ADC]: $\dfrac{(2-1) \times f(a)}{2} = \dfrac{-a^3 + 4a}{2}$

Como se pretende que as áreas sejam iguais, então $\dfrac{3(a-1)}{2} = \dfrac{-a^3 + 4a}{2}$.

$\dfrac{3(a-1)}{2} = \dfrac{-a^3 + 4a}{2} \Leftrightarrow a^3 - a - 3 = 0$

Pretende-se provar, recorrendo ao Teorema de Bolzano, que a equação $a^3 - a - 3 = 0$ é possível no intervalo $]1, 2[$.

Seja g a função polinomial definida por $g(x) = x^3 - x - 3$.

A função polinomial g é contínua em $\mathbb{R}$, em particular, no intervalo $[1, 2]$.

$g(1) = -3$ e $g(2) = 3$.

Sendo g contínua em $[1, 2]$ e $g(1) < 0 < g(2)$, pelo Teorema de Bolzano conclui-se que $\exists a \in \,]1, 2[: \ g(a) = 0$, ou seja, para este valor de a, as medidas das áreas dos dois triângulos são iguais.