CADERNO 1

1.

1.1. Considere-se o acontecimento A: "pelo menos um dos membros do casal é escolhido"

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{{}^5C_3}{{}^7C_3}=1-\frac{10}{35}\approx 0{,}714$$

Resposta: Opção **(C)** 0,714

1.2. Seja n o número de sequências diferentes que é possível formar.

$n=6!\times 2!=1440$

$6!$: permutações do casal juntamente com os restantes elementos.

$2!$: permutações entre os elementos do casal.

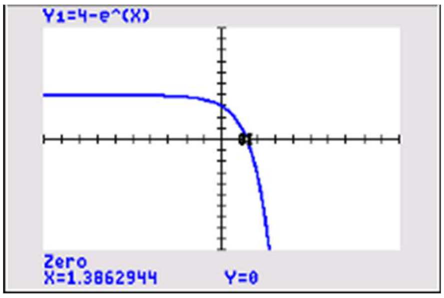
Resposta: Podem formar-se 1440 sequências diferentes.

2.

2.1. $f'(x)=4x-\mathrm{e}^x$

$f''(x)=4-\mathrm{e}^x$

Observando uma representação gráfica de f'', identifica-se o valor arredondado do seu zero, observando que há mudança de sinal.



$x\approx 1{,}39$

Resposta: Opção **(A)** 1,39

2.2. $$k=\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x^2-4x}=\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x(x-4)}=\lim_{x\to 4}\frac{1}{x}\times\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=$$

$$=\frac{1}{4}\times f'(4)=\frac{1}{4}\times\left(16-\mathrm{e}^4\right)\approx -9{,}650$$

Resposta: Opção **(A)** $-10<k<-9$

3.

3.1. Como a reta $y=1$ é assíntota ao gráfico de f quando x tende para $+\infty$, o seu declive é 0.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(3-\frac{f(x)}{x}\right)=3-\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)=3-0=3$$

Resposta: Opção **(D)** 3

3.2. $g(x)=x^2-\sqrt{f(x)}$

$$g'(x)=2x-\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}.$$

Atendendo a que a reta r passa pelos pontos (2, 3) e (0, 6) e designando por m o seu declive, tem-se $m=\frac{6-3}{0-2}=-\frac{3}{2}$. Então, $f'(2)=-\frac{3}{2}$.

$$g'(2)=4-\frac{f'(2)}{2\sqrt{f(2)}} = 4-\frac{-\frac{3}{2}}{2\sqrt{3}} = 4+\frac{3}{4\sqrt{3}}=4+\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{16+\sqrt{3}}{4}\approx 4,43$$

Resposta: $g'(2)\approx 4,43$

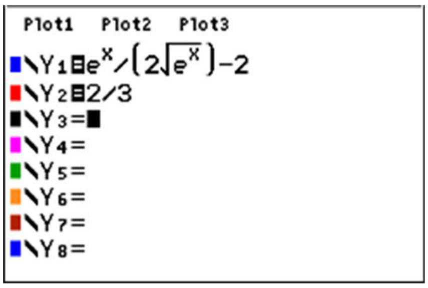
4. $f(x)=\sqrt{e^x}-2x$

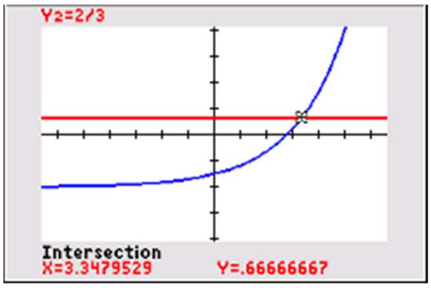
$$f'(x)=\frac{e^x}{2\sqrt{e^x}}-2$$

Sejam m_r e m_s os declives das retas r e s, respetivamente.

$m_r=f'(0)=\frac{e^0}{2\sqrt{e^0}}-2=\frac{1}{2}-2=-\frac{3}{2}$, pelo que $m_s=-\frac{1}{m_r}=\frac{2}{3}$.

Então, resolvendo a equação $f'(x)=\frac{2}{3}$ graficamente, obtém-se:





$x\approx 3,35$

Resposta: A abcissa do ponto B é, aproximadamente, 3,35 .

FIM (Caderno 1)

CADERNO 2

5. $\lim u_n = \lim\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$

Sabe-se que (u_n) é crescente, logo $u_n \to \mathrm{e}^-$. Então, $\lim f(u_n) = -\infty$.

Resposta: Opção **(D)** $-\infty$

6.

6.1. Como o domínio de f é $\mathbb{R}$ e a função é contínua, uma vez que se trata de uma função irracional, então não tem assíntotas verticais.

Assíntotas não verticais:

Seja $y = mx + b$.

$$m = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+4}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{4}{x^2}} = 1$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4}-x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+4}-x\right)\left(\sqrt{x^2+4}+x\right)}{\sqrt{x^2+4}+x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+4-x^2}{\sqrt{x^2+4}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{4}{\sqrt{x^2+4}+x} = \frac{4}{+\infty} = 0$$

Quando $x \to +\infty$, o gráfico de f admite a assíntota de equação $y = x$.

Repetindo o processo quando $x \to -\infty$:

$$m = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+4}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}\right) = -1$$

$$b = \lim_{x\to-\infty}\left(f(x)+x\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+4}+x\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+4}+x\right)\left(\sqrt{x^2+4}-x\right)}{\sqrt{x^2+4}-x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+4-x^2}{\sqrt{x^2+4}-x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{4}{\sqrt{x^2+4}-x} = \frac{4}{+\infty} = 0$$

Quando $x \to -\infty$, o gráfico de f admite a assíntota de equação $y = -x$.

Resposta: As assíntotas ao gráfico de f são definidas pelas equações $y = x$ e $y = -x$.

6.2. **a)** Como a função f é par, a abcissa do ponto Q é $-a$. Então, $\overline{QP} = 2a$.

$g(a) = \dfrac{2a \times f(a)}{2}$, isto é, $g(a) = \dfrac{2a \times \sqrt{a^2+4}}{2} \Leftrightarrow g(a) = a \times \sqrt{a^2+4}$.

b) A função g definida por $g(x) = x\sqrt{x^2+4}$ é uma função contínua em $\mathbb{R}$, em particular, é contínua no intervalo $[1, 2]$.

$g(1) = \sqrt{5}$ e $g(2) = 2\sqrt{2^2+4} = 2\sqrt{8} = \sqrt{32}$

Como $5 < 28 < 32$, então $\sqrt{5} < \sqrt{28} < \sqrt{32}$.

Pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, conclui-se que $\exists a \in \left]1, 2\right[: g(a) = \sqrt{28}$.

7.

7.1. $\lim(u_n) = \lim\left(\dfrac{n+k}{n+2}\right)^n = \lim\left(\dfrac{n\left(1+\frac{k}{n}\right)}{n\left(1+\frac{2}{n}\right)}\right)^n = \lim\left(\dfrac{\left(1+\frac{k}{n}\right)}{\left(1+\frac{2}{n}\right)}\right)^n = \dfrac{\lim\left(1+\frac{k}{n}\right)^n}{\lim\left(1+\frac{2}{n}\right)^n} = \dfrac{e^k}{e^2} = e^{k-2}$

$e^{k-2} = f(1) \times f(4) \Leftrightarrow e^{k-2} = \dfrac{1}{2}e^{\frac{1}{4}} \times 2e \Leftrightarrow e^{k-2} = e^{\frac{1}{4}+1} \Leftrightarrow e^{k-2} = e^{\frac{5}{4}} \Leftrightarrow k-2 = \dfrac{5}{4} \Leftrightarrow k = \dfrac{13}{4}$

Resposta: Opção **(C)** $\dfrac{13}{4}$

7.2. $f(x) = \dfrac{x}{2}e^{\frac{x}{4}}$

$f'(x) = \dfrac{1}{2} \times e^{\frac{x}{4}} + \dfrac{x}{2}e^{\frac{x}{4}} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}e^{\frac{x}{4}} + \dfrac{x}{8}e^{\frac{x}{4}} = \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{8}\right)e^{\frac{x}{4}} = \dfrac{4+x}{8}e^{\frac{x}{4}}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{4+x}{8}e^{\frac{x}{4}} = 0 \Leftrightarrow 4+x = 0 \lor e^{\frac{x}{4}} = 0 \Leftrightarrow x = -4$

x	$-\infty$	-4	$-\infty$
$f'(x)$	–	0	+
$f(x)$	↘	$-\dfrac{2}{e}$	↗

$f(-4) = -2e^{-1} = -\dfrac{2}{e}$

Resposta: $C\left(-4, -\dfrac{2}{e}\right)$

8.

8.1. $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow 4^{x+1} - \frac{1}{2} \leq 0 \Leftrightarrow 2^{2(x+1)} \leq 2^{-1} \Leftrightarrow 2x+2 \leq -1 \Leftrightarrow x \leq -\frac{3}{2}$

$x \in \left]-\infty, -\frac{3}{2}\right]$

Resposta: O conjunto-solução é $\left]-\infty, -\frac{3}{2}\right]$.

8.2. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 4^{x+1} - \frac{1}{2} = 2^x \Leftrightarrow 4 \times 4^x - \frac{1}{2} = 2^x \Leftrightarrow 4 \times \left(2^x\right)^2 - 2^x - \frac{1}{2} = 0$

Seja $2^x = y$.

$4y^2 - y - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow 8y^2 - 2y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{2 \pm \sqrt{4+32}}{16} \Leftrightarrow y = \frac{1}{2} \ \vee \ y = -\frac{1}{4}$

$2^x = \frac{1}{2} \ \vee \ \underbrace{2^x = -\frac{1}{4}}_{\text{cond. impossível}} \Leftrightarrow 2^x = 2^{-1} \Leftrightarrow x = -1$

Resposta: $S = \{-1\}$

9. $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{e^{2x} - e^x}{2x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{e^x\left(e^x - 1\right)}{2x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{e^x}{2} \times \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$

$\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}} + 1}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$

$f(0) = 4^k$

Para a função ser contínua no ponto de abcissa 0, deve verificar-se:

$f(0) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$

$4^k = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2^{2k} = 2^{-1} \Leftrightarrow 2k = -1 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{2}$

Resposta: O valor de k é $-\frac{1}{2}$.

FIM (Caderno 2)