Proposta de teste de avaliação [maio – 2019]

Nome: ____

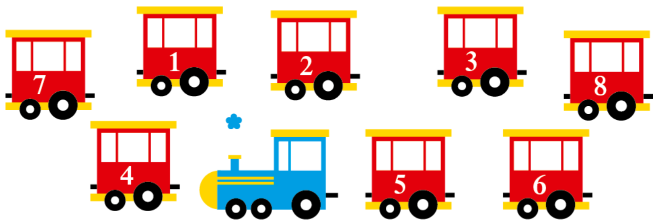
Ano / Turma: _________ **N.º:** _____ **Data:** ___ - ____ - ___

- Não é permitido o uso de corretor. Deves riscar aquilo que pretendes que não seja classificado.
- A prova inclui um formulário.
- As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

CADERNO 1

(É permitido o uso de calculadora gráfica.)

1. O Rui vai montar um comboio constituído por uma máquina e oito carruagens numeradas de 1 a 8.



A montagem deve ser feita de modo que duas carruagens consecutivas não podem ter ambas números ímpares ou números pares, tal como é exemplificado a seguir.

Nestas condições, quantas são as possibilidades de montagem?

(A) 576 **(B)** 1152

(C) 1728 **(D)** 192

2. Considera, em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, a condição:

$$|z-\mathrm{i}| \leq 1 \ \wedge \ 0 \leq \operatorname{Arg}(z) \leq \frac{\pi}{4}$$

No plano complexo, esta condição define uma região.

Qual é a área dessa região, arredondada às centésimas?

(A) $0,29$ **(B)** $2,64$

(C) $1,07$ **(D)** $0,37$

3. Considera, em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, $z_1 = 3 + \mathrm{i}$ e $z_2 = \frac{-z_1}{\mathrm{i}}$.

Para um número real θ, pertencente ao intervalo $\left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$, o número complexo $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ verifica a condição $|z - z_1| = |z - z_2|$.

Determina o valor de θ arredondado às centésimas.

4. Um ponto *P* desloca-se numa reta numérica, no intervalo de tempo $I = [0, 10]$ (medido em segundos), de tal forma que a abcissa, no instante *t* é dada por

$$x(t) = -2\sin\left(\frac{\pi t}{3} + \pi\right)$$

4.1. Recorre às capacidades gráficas da calculadora e determina, no intervalo de tempo considerado, o número de vezes em que a distância do ponto *P* à origem é igual a $1{,}5$.

Na resposta deves apresentar:
– a equação do problema;
– a reprodução, num referencial, do(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que te permitem identificar o número de soluções da equação.

4.2. Sabe-se que $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, com $A > 0$, $\omega > 0$ e $\varphi \in [0, 2\pi[$.
Qual é a fase deste oscilador harmónico?

(A) π **(B)** $\frac{3\pi}{4}$

(C) $\frac{\pi}{2}$ **(D)** $\frac{3\pi}{2}$

FIM (Caderno 1)

Cotações						Total
Questões – Caderno 1	**1.**	**2.**	**3.**	**4.1.**	**4.2.**	
Pontos	12	12	20	19	12	**75**

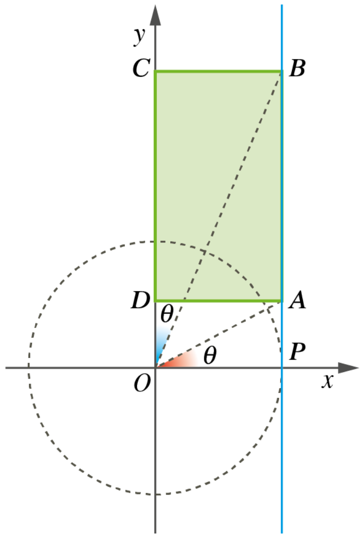
CADERNO 2

(Não é permitido o uso de calculadora.)

5. Na figura, está representada, num referencial o.n. xOy, a circunferência de centro na origem e raio 1.

Sabe-se que:

- o ponto P tem coordenadas $(1, 0)$;
- $[ABCD]$ é um retângulo;
- os ângulos POA e BOC são geometricamente iguais e cada um deles tem amplitude θ, com $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$.



Seja f a função, de domínio $\left]0, \frac{\pi}{4}\right[$, em que $f(\theta)$ representa a área do retângulo $[ABCD]$.

5.1. Mostra que $f(\theta) = \dfrac{2}{\tan(2\theta)}$.

5.2. Determina uma equação, na forma $y = mx + b;\ m \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R}$, da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $\frac{\pi}{12}$.

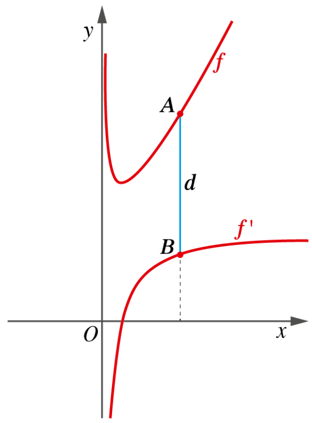
6. Considera a função f, de domínio $]-\pi, +\infty[$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x - \sin\left(\dfrac{x}{2}\right)}{\sin x} & \text{se } x \in]-\pi, 0[\\ 1{,}5 & \text{se } x = 0 \\ \dfrac{3e^{3x} - 3e^{x}}{4x} & \text{se } x \in]0, +\infty[\end{cases}$$

Verifica se f é contínua em $x = 0$.

7. Considera a função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = 2x - \ln\left(\frac{x}{4}\right)$.

Na figura, em referencial o.n. Oxy, estão representadas as funções f e f' (função derivada de f).

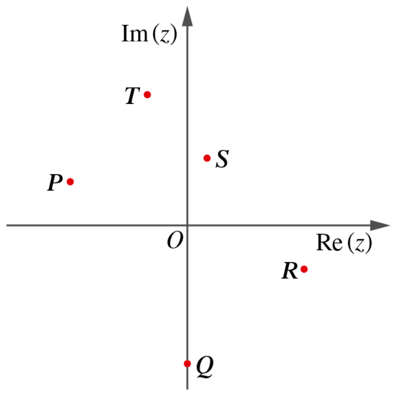


Sabe-se que os pontos A e B têm igual abcissa. O ponto A pertence ao gráfico de f e B pertence ao gráfico de f'.

A distância entre os pontos A e B é dada por $d(x)$, em que x representa a abcissa comum aos pontos A e B.

Determina as coordenadas de B quando a função d atinge um mínimo.

8. Na figura, no plano complexo, estão representados cinco pontos: P, Q, R, S e T.



Sabe-se que:

- o ponto P é o afixo de um número complexo z;
- $w = \frac{\overline{z}}{\text{i}}$

O afixo do número complexo w pode ser:

(A) o ponto S **(B)** o ponto Q

(C) o ponto T **(D)** o ponto R

9. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considera $w = \frac{1 + \text{i}^{17}}{\sqrt{3} - \text{i}}$.

Sabe-se que w é uma das raízes cúbicas de um número complexo z.

Determina a raiz cúbica de z, cujo afixo, no plano complexo, pertence ao quarto quadrante.

Apresenta o resultado na forma trigonométrica com argumento pertencente ao intervalo $\left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[$.

10. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considera $z=\dfrac{\mathrm{i}^{33}-(1+\mathrm{i})^2}{2\cos^2\theta+\mathrm{i}\sin(2\theta)}$, com $\theta\in\left]0,\pi\right[$.

10.1. Mostra que $z=\dfrac{1}{2\cos\theta}\times e^{\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)\mathrm{i}}$.

10.2. Considera o resultado $z=\dfrac{1}{2\cos\theta}\times e^{\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)\mathrm{i}}$ e representa z, na forma:

a) algébrica, se $\theta=\dfrac{\pi}{4}$;

b) trigonométrica, se $\theta=\dfrac{2\pi}{3}$.

FIM (Caderno 2)

Cotações										Total
Questões – Caderno 2	**5.1.**	**5.2.**	**6.**	**7.**	**8.**	**9.**	**10.1.**	**10.2. a)**	**10.2. b)**	
Pontos	14	15	12	15	12	15	12	15	15	**125**

FORMULÁRIO

GEOMETRIA

Comprimento de um arco de circunferência: αr

(α : amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r : raio)

Área de um polígono regular: $\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$

Área de um setor circular: $\dfrac{\alpha r^2}{2}$

(α : amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r : raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$

(r : raio da base; g : geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$

(r : *raio*)

Volume de uma pirâmide: $\dfrac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Volume de um cone: $\dfrac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Volume de uma esfera: $\dfrac{4}{3}\pi r^3$ (r : raio)

PROGRESSÕES

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\dfrac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \dfrac{1 - r^n}{1 - r}$

TRIGONOMETRIA

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\dfrac{\sin A}{a} = \dfrac{\sin B}{b} = \dfrac{\sin C}{c}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

COMPLEXOS

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$ ou $\left(\rho e^{i\theta}\right)^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\dfrac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ ou $\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$

$(k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

PROBABILIDADES

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

REGRAS DE DERIVAÇÃO

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\sin u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

$(\tan u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

LIMITES NOTÁVEIS

$\lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$