CADERNO 1

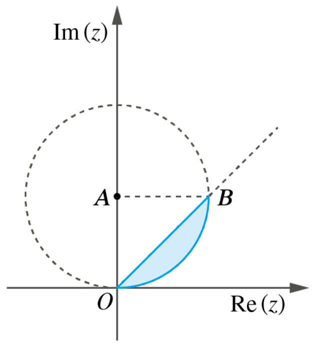
1. Podemos ter sequências do tipo

$\boxed{Maq.}\boxed{I}\boxed{P}\boxed{I}\boxed{P}\boxed{I}\boxed{P}\boxed{I}\boxed{P}$ $4!\times 4!$ ou $\boxed{Maq.}\boxed{P}\boxed{I}\boxed{P}\boxed{I}\boxed{P}\boxed{I}\boxed{P}\boxed{I}$ $4!\times 4!$

Nas condições pretendidas, o número de possibilidades é dado por $2\times 4!\times 4!$, ou seja, 1152.

Resposta: Opção **(B)** 1152

2. Na figura está representada a região definida pela condição



$$|z-\mathrm{i}|\leq 1 \wedge 0\leq \operatorname{Arg}(z)\leq \frac{\pi}{4}$$

A área da referida região é dada por:

$$\frac{\pi\times 1^2}{4}-\frac{1\times 1}{2}=\frac{\pi-2}{4}$$

$$\frac{\pi-2}{4}\approx 0{,}29$$

Resposta: Opção **(A)** $0{,}29$

3. $z_1=3+\mathrm{i}$, $z_2=\frac{-z_1}{\mathrm{i}}=\frac{-3-\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=(-3-\mathrm{i})\times(-\mathrm{i})=-1+3\mathrm{i}$ e $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$

$$|\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta-(3+\mathrm{i})|=|\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta-(-1+3\mathrm{i})|\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |(-3+\cos\theta)+(-1+\sin\theta)\mathrm{i}|=|(1+\cos\theta)+(-3+\sin\theta)\mathrm{i}|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(-3+\cos\theta)^2+(-1+\sin\theta)^2}=\sqrt{(1+\cos\theta)^2+(-3+\sin\theta)^2}$$

Daqui resulta:

$$9-6\cos\theta+\cos^2\theta+1-2\sin\theta+\sin^2\theta=1+2\cos\theta+\cos^2\theta+9-6\sin\theta+\sin^2\theta$$

$$\Leftrightarrow -8\cos\theta=-4\sin\theta\Leftrightarrow 2\cos\theta=\sin\theta$$

No intervalo $\left]\pi,\frac{3\pi}{2}\right[$, tem-se $\tan(\theta)=2$.

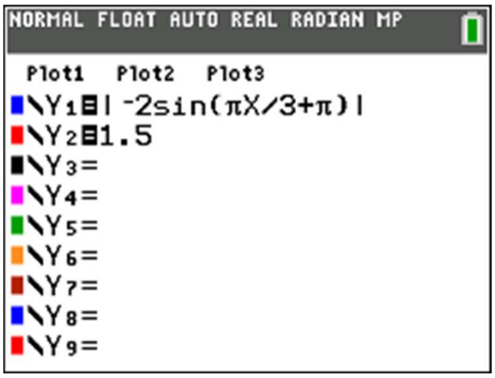
$$\theta=\arctan(2)+\pi$$

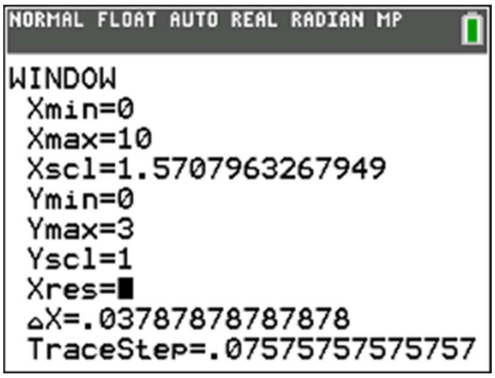
$$\theta\approx 4{,}25$$

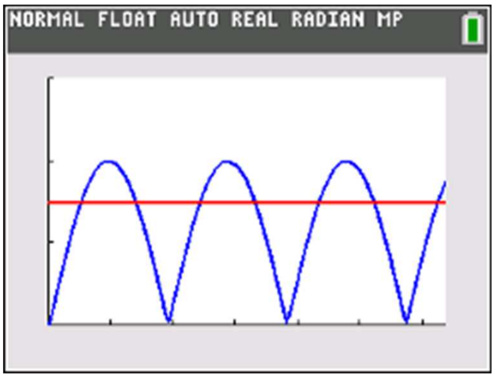
Resposta: $\theta\approx 4{,}25$

4.1. No intervalo $I=[0,10]$ pretende-se identificar o número de soluções da equação $|x(t)|=1{,}5$, ou seja, $\left|-2\sin\left(\frac{\pi t}{3}+\pi\right)\right|=1{,}5$.

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, tem-se:







Podemos observar que os gráficos das funções consideradas se intersetam 7 vezes, o que significa que o ponto P se encontra a uma distância de 1,5 da origem em 7 momentos distintos.

4.2. $x(t)=-2\sin\left(\frac{\pi t}{3}+\pi\right)=2\sin\left(-\frac{\pi t}{3}-\pi\right)=2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi t}{3}-\pi\right)\right)$

$x(t)=2\cos\left(\frac{\pi t}{3}+\frac{3\pi}{2}\right)$

Conclui-se que a fase do oscilador harmónico é $\frac{3\pi}{2}$.

Resposta: Opção **(D)** $\frac{3\pi}{2}$

FIM
(Caderno 1)

CADERNO 2

5.1. $\tan\theta = \dfrac{\overline{AP}}{1}$. Daqui resulta que $\overline{AP} = \tan\theta$.

$\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right) = \dfrac{\overline{PB}}{1}$ Daqui resulta que $\overline{PB} = \tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)$.

$$\overline{AB} = \overline{PB} - \overline{PA} = \tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) - \tan\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$= \frac{2\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)}{2\sin\theta\cos\theta} = \frac{2\cos(2\theta)}{\sin(2\theta)} = \frac{2}{\tan(2\theta)}$$

A área do retângulo [$ABCD$] é dada por $\overline{AD}\times\overline{AB}$, ou seja, $1\times\dfrac{2}{\tan(2\theta)}$.

Assim, tem-se: $f(\theta) = \dfrac{2}{\tan(2\theta)}$.

5.2. $f\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{2}{\tan\left(\dfrac{\pi}{6}\right)} = \dfrac{2}{\dfrac{\sqrt{3}}{3}} = \dfrac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$

Ponto de tangência: $\left(\dfrac{\pi}{12}, f\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\right) = \left(\dfrac{\pi}{12}, 2\sqrt{3}\right)$

$$f'(\theta) = \left(\frac{2}{\tan(2\theta)}\right)' = \frac{-2\times\dfrac{2}{\cos^2(2\theta)}}{\tan^2(2\theta)} = \frac{-4}{\sin^2(2\theta)}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{-4}{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{6}\right)} = \frac{-4}{\dfrac{1}{4}} = -16$$

A equação da reta tangente é do tipo $y = -16x + b$ e passa no ponto de coordenadas $\left(\dfrac{\pi}{12}, 2\sqrt{3}\right)$. Então, $2\sqrt{3} = -\dfrac{4\pi}{3} + b$. Daqui resulta que $b = 2\sqrt{3} + \dfrac{4\pi}{3}$.

Assim, tem-se $y = -16x + 2\sqrt{3} + \dfrac{4\pi}{3}$.

Resposta: $y = -16x + 2\sqrt{3} + \dfrac{4\pi}{3}$

6. A função *f* é contínua em $x=0$ se e só se $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$.

$f(0)=1,5=\frac{3}{2}$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{2x-\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin x} = 2\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{\sin x} - \frac{\frac{1}{2}\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}}{\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x}}$$

Fazendo $\frac{x}{2}=y$, tem-se:

$$2\times\frac{1}{\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x}} - \frac{\frac{1}{2}\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}}{1} = 2\times 1-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{3e^{3x}-3e^{x}}{4x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{3e^{x}\left(e^{2x}-1\right)}{4x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{3e^{x}}{2}\times\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{2x}-1}{2x} = \frac{3}{2}\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{2x}-1}{2x}$$

Fazendo $2x=t$, tem-se:

$$\frac{3}{2}\times\lim_{t\to 0}\frac{e^{t}-1}{t}=\frac{3}{2}.$$

Como $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)=\frac{3}{2}$, conclui-se que *f* é contínua em $x=0$.

7. $f(x)=2x-\ln\left(\frac{x}{4}\right)=2x-\ln x+\ln 4$

$f'(x)=\left(2x-\ln x+\ln 4\right)'=2-\frac{1}{x}$

$d(x)=f(x)-f'(x)=2x-\ln x+\ln 4-2+\frac{1}{x}$

$d'(x)=\left(2x-\ln x+\ln 4-2+\frac{1}{x}\right)'=2-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{2x^2-x-1}{x^2}$

$d'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{2x^2-x-1}{x^2}=0 \Leftrightarrow 2x^2-x-1=0 \wedge x>0$

$\Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{4} \wedge x>0 \Leftrightarrow \left(x=1 \vee x=-\frac{1}{2}\right) \wedge x>0$

x	0		1	$+\infty$
$d'(x)$		–	0	+
d		↘	$d(1)$	↗

A distância é mínima quando a abcissa de *A* e de *B* é 1.

Assim, o ponto *B* tem coordenadas $\left(1,\ f'(1)\right)$, ou seja, $(1, 1)$.

Resposta: $B(1, 1)$

8. Repara que $w=\dfrac{\overline{z}}{\mathrm{i}}=-\mathrm{i}\times\overline{z}=\mathrm{i}\times\left(-\overline{z}\right)$

O afixo do conjugado de z é o simétrico de P em relação ao eixo real (4.º quadrante).

O afixo de $-\overline{z}$ é o simétrico em relação à origem do afixo de $\overline{z}$ (1.º quadrante).

O afixo de $\mathrm{i}\times\left(-\overline{z}\right)$ é a imagem do afixo de $-\overline{z}$ pela rotação de centro O e amplitude $\dfrac{\pi}{2}$.

A única possibilidade, das apresentadas, é o ponto T.

Resposta: Opção **(C)** o ponto T

9. $w=\dfrac{1+\mathrm{i}^{17}}{\sqrt{3}-\mathrm{i}}=\dfrac{1+\mathrm{i}}{2e^{-\frac{\pi}{6}\mathrm{i}}}=\dfrac{\sqrt{2}\,e^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4}\right)}}{2e^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{6}\right)}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times e^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times e^{\mathrm{i}\left(\frac{5\pi}{12}\right)}$

As outras raízes cúbicas de z são w_1 e w_2, sendo:

$$w_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\times e^{\mathrm{i}\left(\frac{5\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}\right)}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times e^{\mathrm{i}\left(\frac{13\pi}{12}\right)}$$

$$w_2=\frac{\sqrt{2}}{2}\times e^{\mathrm{i}\left(\frac{13\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}\right)}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times e^{\mathrm{i}\left(\frac{21\pi}{12}\right)}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times e^{\mathrm{i}\left(\frac{7\pi}{4}\right)}$$

A raiz cúbica de z com argumento pertencente a $\left]\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right[$ é $w_2=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times e^{\mathrm{i}\left(\frac{7\pi}{4}\right)}$.

Resposta: $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times e^{\mathrm{i}\left(\frac{7\pi}{4}\right)}$

10.1. $z=\dfrac{\mathrm{i}-\left(1+2\mathrm{i}-1\right)}{2\cos\theta\left(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta\right)}=\dfrac{-\mathrm{i}}{2\cos\theta\times e^{\mathrm{i}\theta}}=\dfrac{e^{\mathrm{i}\left(\frac{3\pi}{2}\right)}}{2\cos\theta\times e^{\mathrm{i}\theta}}=\dfrac{1}{2\cos\theta}\times e^{\mathrm{i}\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)}$

$$z=\frac{1}{2\cos\theta}\times e^{\mathrm{i}\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)}$$

10.2.

a) Se $\theta=\dfrac{\pi}{4}$, $z=\dfrac{1}{2\cos\frac{\pi}{4}}\times e^{\mathrm{i}\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}=\dfrac{1}{2\times\frac{\sqrt{2}}{2}}\times e^{\mathrm{i}\left(\frac{5\pi}{4}\right)}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\dfrac{5\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\dfrac{5\pi}{4}\right)$

$$z=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right)=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$$

Resposta: $z=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$

b) Se $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$, $z = \dfrac{1}{2\cos\dfrac{2\pi}{3}} \times e^{i\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{2\pi}{3}\right)} = \dfrac{1}{-1} \times e^{i\left(\frac{5\pi}{6}\right)} = e^{i\pi} \times e^{i\left(\frac{5\pi}{6}\right)} = e^{i\left(\frac{11\pi}{6}\right)}$

$z = e^{i\left(\frac{11\pi}{6}\right)}$

Resposta: $z = e^{i\left(\frac{11\pi}{6}\right)}$

FIM
(Caderno 2)