Proposta de teste de avaliação

Matemática A

12.º ANO DE ESCOLARIDADE

Duração: 90 minutos **| Data:**

Caderno 1

(é permitido o uso de calculadora)

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identificam a opção escolhida.

---

1. Considere uma empresa em que, relativamente aos seus trabalhadores, se sabe que:

- dois em cada cinco são mulheres;
- 24% são mulheres do quadro da empresa (têm contrato de trabalho permanente);
- a terça parte dos homens não pertencem ao quadro (têm contrato de trabalho a prazo).

1.1. Escolhido, ao acaso, um trabalhador dessa empresa, determine a probabilidade de esse trabalhador

a) pertencer ao quadro da empresa, sabendo que é uma mulher;

b) pertencer ao quadro da empresa;

c) ser um homem sabendo que não pertence ao quadro da empresa.

1.2. Determine o número de trabalhadores da empresa, sabendo que 36 destes são mulheres que não pertencem ao quadro.

2. Considere todas as palavras, com ou sem significado, que se podem formar alterando a ordem das oito letras da palavra ***estender***.

2.1. Quantas palavras é possível formar?

2.2. Escolhendo, ao acaso, uma dessas palavras, qual é a probabilidade de que a mesma mantenha a ordem das consoantes (da palavra *estender*) e não tenha vogais seguidas?
Apresente o resultado na forma de percentagem, arredondado às décimas.

3. Considere todos os números naturais de sete algarismos que se podem escrever com os algarismos de 1 a 9.

Quantos desses números têm exatamente quatro algarismos 9?

(A) 11 760

(B) 17 920

(C) 282 240

(D) 430 080

Fim do Caderno 1

COTAÇÕES (Caderno 1)

Item							
Cotação (em pontos)							
1.1.a)	**1.1.b)**	**1.1.c)**	**1.2.**	**2.1**	**2.2**	**3.**	
16	17	17	17	16	17	10	**110**

Caderno 2

(não é permitido o uso de calculadora)

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identificam a opção escolhida.

---

4. Seja E um conjunto finito, P uma probabilidade em $\mathcal{P}(E)$ e sejam A e B dois acontecimentos $\left(A, B \in \mathcal{P}(E)\right)$.

Sabe-se que

- $P(A) = 0,6$
- $P(A \cap B) = 0,1$
- $P(A \mid B) = 0,5$

Qual é o valor de $P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)$?

(A) 0,2 **(B)** 0,3 **(C)** 0,5 **(D)** 0,7

5. Numa caixa há 10 bolas indistinguíveis ao tato. Sabe-se que algumas bolas são vermelhas e as restantes são amarelas.

5.1. Tiram-se ao acaso, sucessivamente e sem reposição, duas bolas da caixa.

Sabe-se que a probabilidade de que as duas bolas extraídas sejam vermelhas é igual a $\frac{2}{9}$.

Determine o número de bolas amarelas que estão na caixa?

5.2. Admita agora que na caixa estão sete bolas vermelhas e três amarelas.
As dez bolas da caixa são colocadas numa fila, ocupando as dez casas de um tabuleiro, numeradas de 1 a 10, como o que se representa na figura:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

De quantas maneiras se pode ordenar as bolas de modo que no início e o fim da fila fiquem bolas da mesma cor?

(A) 120 **(B)** 112 **(C)** 64 **(D)** 56

6. Seja E um conjunto finito, P uma probabilidade em $\mathcal{P}(E)$ e sejam A e B dois acontecimentos $(A, B \in \mathcal{P}(E))$ tais que

- $P(A) = 0{,}8$
- $P(B) = 0{,}4$

Mostre que $\frac{1}{4} \leq P(B \mid A) \leq \frac{1}{2}$.

7. Uma turma do 12.º ano é constituída por 25 alunos sendo 15 raparigas e 10 rapazes.
Nessa turma vai ser constituída uma comissão de cinco membros aos quais serão atribuídos cinco cargos diferentes.

De quantas maneiras se poderá formar a comissão se dela fizerem parte três raparigas e dois rapazes?

(A) ${}^{15}A_3 \times {}^{10}A_2$ **(B)** ${}^{15}C_3 \times {}^{10}C_2$

(C) ${}^{15}A_3 \times {}^{10}A_2 \times 5!$ **(D)** ${}^{15}C_3 \times {}^{10}C_2 \times 5!$

8. Considere a linha do Triângulo de Pascal cuja soma dos quatro menores elementos é igual a 22.

Escolhem-se, ao acaso, dois elementos dessa linha.

Qual é a probabilidade de a soma desses dois elementos ser inferior a 100?

(A) $\frac{15}{{}^{11}C_2}$ **(B)** $\frac{6}{{}^{11}C_2}$ **(C)** $\frac{15}{{}^{10}C_2}$ **(D)** $\frac{6}{{}^{10}C_2}$

9. Considere as sucessões (u_n) e (v_n) tais que $\lim u_n = -\infty$ e, para $n > 100$, $v_n \geq \frac{n^2 - nu_n}{n}$.

Determina, justificando, o limite de v_n.

Fim da prova

COTAÇÕES (Caderno 2)

Item							
Cotação (em pontos)							
4.	**5.1.**	**5.2.**	**6.**	**7.**	**8.**	**9.**	
10	17	10	17	10	10	16	**90**
TOTAL (Caderno1 + Caderno2)							**200**

Proposta de resolução

Caderno 1

1. Sejam os acontecimentos:

M : "O trabalhador escolhido é uma mulher."

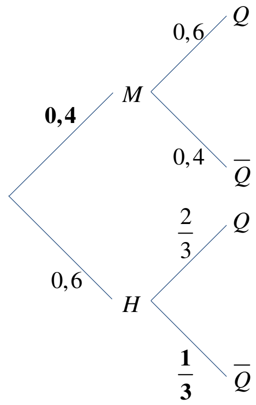
H : "O trabalhador escolhido é um homem."

Q : "O trabalhador escolhido pertence ao quadro da empresa."

É dado que

- $P(M)=\frac{2}{5}=0,4$
- $P(M \cap Q)=0,24$
- $P(\overline{Q} \mid H)=\frac{1}{3}$

No diagrama ao lado registaram-se os valores dados bem como aqueles que foram sendo sucessivamente determinados.



1.1. **a)** $P(Q \mid M)=\frac{P(Q \cap M)}{P(M)}=\frac{0,24}{0,4}=0,6$

b) $P(H)=1-P(M)=1-0,4=0,6$

$P(Q \mid H)=1-P(\overline{Q} \mid H)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

$P(Q)=P(M \cap Q)+P(H \cap Q)$

$=0,24+P(H)\times P(Q \mid H)=$

$=0,24+0,6\times\frac{2}{3}=0,24+0,4=0,64$

c) $P(H \mid \overline{Q})=\frac{P(H \cap \overline{Q})}{P(\overline{Q})}$

$P(H \cap \overline{Q})=P(H)\times P(\overline{Q} \mid H)=0,6\times\frac{1}{3}=0,2$

$P(\overline{Q})=1-P(Q)=1-0,64=0,36$

$P(H \mid \overline{Q})=\frac{P(H \cap \overline{Q})}{P(\overline{Q})}=\frac{0,2}{0,36}=\frac{5}{9}$

1.2. $P\left(\overline{Q}\mid M\right)=1-P\left(Q\mid M\right)=1-0,6=0,4$

$P\left(M\cap\overline{Q}\right)=P\left(M\right)\times P\left(\overline{Q}\mid M\right)=0,4\times0,4=0,16$

16% dos trabalhadores são mulheres que não pertencem ao quadro.

Seja x o número total de trabalhadores.

$0,16x=36\Leftrightarrow x=\dfrac{36}{0,16}\Leftrightarrow x=225$

A empresa tem 225 trabalhadores.

2.

2.1. São oito letras sendo três iguais.

O número de palavras que é possível formar é dado por:

$\dfrac{8!}{3!}=6720$ ou ${}^{8}C_{3}\times5!=6720$

2.2. Número de casos possíveis: 6720

Número de casos favoráveis: ${}^{6}C_{3}=20$

Número de maneiras de escolher lugar para as três letras ***e*** entre os seis lugares determinados pelas consoantes _s_***t***_***n***_***d***_***r***_

A probabilidade pedida é dada por:

$P=\dfrac{20}{6720}=\dfrac{1}{336}\approx0,0030\approx0,3\%$

3. ${}^{7}C_{4}\times{}^{8}A_{3}'=35\times512=17\,920$

Número de maneiras de escolher ordenadamente os restantes três algarismos entre os oito possíveis (1 a 8).

Número de maneiras de escolher a posição dos quatro algarismos 9 entre os sete lugares possíveis.

Resposta: (B)

Caderno 2

4. $P(A)=0,6$; $P(A\cap B)=0,1$; $P(A\mid B)=0,5$

$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=$$

$$=1-\left[P(A)+P(B)-P(A\cap B)\right]=$$

$$=1-\left[0,6+P(B)-0,1\right]=1-0,5-P(B)=0,5-P(B)$$

Precisamos calcular $P(B)$.

$$P(A\mid B)=0,5\Leftrightarrow\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=0,5\Leftrightarrow\frac{0,1}{P(B)}=0,5\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,1=0,5P(B)\Leftrightarrow P(B)=\frac{0,1}{0,5}\Leftrightarrow P(B)=\frac{1}{5}$$

$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=0,5-P(B)=\frac{1}{2}-\frac{1}{5}=\frac{5}{10}-\frac{2}{10}=\frac{3}{10}=0,3$$

Resposta: (B)

5.

5.1. Seja n o número de bolas vermelhas que estão na caixa.

Na extração sucessiva e sem reposição de duas bolas da caixa, a probabilidade de que as duas bolas extraídas sejam vermelhas é dada por:

$$\frac{n}{10}\times\frac{n-1}{9}=\frac{n^2-n}{90}$$

Probabilidade de que a 2.ª bola extraída seja vermelha, sabendo que a 1.ª bola extraída é vermelha-

Probabilidade de que a 1.ª bola extraída seja vermelha.

Temos, então, $\dfrac{n^2-n}{90}=\dfrac{2}{9}\Leftrightarrow n^2-n=90\times\dfrac{2}{9}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow n^2-n-20=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n=\frac{1\pm\sqrt{1+4\times 20}}{2}\Leftrightarrow n=\frac{1\pm 9}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n=-4\vee n=5$$

Como $n\in\mathbb{N}$, vem $n=5$.

Logo, há cinco bolas vermelhas e cinco bolas amarelas.

5.2. Nas extremidades da fila podem ficar duas bolas amarelas ou duas bolas vermelhas.

- Duas bolas amarelas nas extremidades:

$$\text{A}\;\underbrace{\text{V V V V A V V V}}\;\text{A}$$

Há ${}^{8}C_1 = 8$ maneiras de escolher um lugar para a bola amarela que não fica nos extremos.

- Duas bolas vermelhas nas extremidades:

$$\text{V}\;\underbrace{\text{A V V V A V A V}}\;\text{V}$$

Há ${}^{8}C_3$ maneiras de escolher o lugar para as três bolas amarelas nos oito lugares possíveis.

$$8 + {}^{8}C_3 = 8 + \frac{8\times 7\times 6}{3\times 2} = 8 + \frac{56\times 6}{6} = 8 + 56 = 64$$

Resposta: (C)

6. $P(A) = 0,8$ e $P(B) = 0,4$

- Sabemos que, como $A \cap B \subset B$ então $P(A \cap B) \leq P(B)$.

$P(A \cap B) \leq P(B) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A \cap B) \leq 0,4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{P(A \cap B)}{0,8} \leq \dfrac{0,4}{0,8} \Leftrightarrow$ $\quad | \; P(A) = 0,8$

$\Leftrightarrow \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} \leq \dfrac{4}{8} \Leftrightarrow$ $\quad \left| \; \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B \mid A) \right.$

$\Leftrightarrow P(B \mid A) \leq \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow$

- $P(A \cup B) \leq 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0,8 + 0,4 - P(A \cap B) \leq 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1,2 - 1 \leq P(A \cap B) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A \cap B) \geq 0,2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{P(A \cap B)}{0,8} \geq \dfrac{0,2}{0,8} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} \geq \dfrac{2}{8} \Leftrightarrow$ $\quad \left| \; \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B \mid A) \right.$

$\Leftrightarrow P(B \mid A) \geq \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow$

Portanto, $\dfrac{1}{4} \leq P(B \mid A) \leq \dfrac{1}{2}$.

7. As três raparigas podem ser escolhidas entre as 15 de ${}^{15}C_3$ maneiras diferentes.

Os dois rapazes podem ser escolhidos entre os 10 de ${}^{10}C_2$ maneiras diferentes.

Os cinco cargos podem ser atribuídos aos cinco elementos de $5!$ maneiras diferentes.

Portanto, a comissão pode ser formada de ${}^{15}C_3 \times {}^{10}C_2 \times 5!$ maneiras.

Resposta: (D)

8. O primeiro e o último elementos da linha são iguais a 1. Logo, a soma do segundo elemento com o penúltimo é igual a 20. Como o segundo elemento é igual ao penúltimo, cada um deles é igual a 10.

Assim, trata-se da linha de ordem 10, ou seja, a linha com os elementos da forma ${}^{10}C_k$ com $0 \le k \le 10$, pelo que tem 11 elementos.

O número de casos possíveis é ${}^{11}C_2$ (é o número de maneiras de escolher dois elementos entre os 11 possíveis).

Como ${}^{10}C_1 = 10$,

$${}^{10}C_2 = \frac{10\times 9}{2} = 45 \text{ e}$$

$${}^{10}C_3 = \frac{10\times 9\times 8}{3\times 2} = 10\times 3\times 4 = 120$$

Os menores elementos da linha são:

1 **10** **45** 120 ... 120 **45** **10** **1**

Para que a soma dos dois elementos escolhidos seja inferior a 100, estes terão de ser escolhidos entre os seis elementos menores ou iguais a 45.

Logo, o número de casos favoráveis é igual a ${}^{6}C_2 = \frac{6\times 5}{2} = 15$ e a probabilidade pedida é $\frac{15}{{}^{11}C_2}$.

Resposta: (A)

9. $\lim \frac{n^2 - nu_n}{n} = \lim \frac{n(n-u_n)}{n} = \lim (n - u_n) = +\infty - (-\infty) = +\infty$, pois $\lim u_n = -\infty$.

Dado que, a partir da ordem 100, $\frac{n^2 - nu_n}{n} \le v_n$ e $\lim \frac{n^2 - nu_n}{n} = +\infty$ então $\lim v_n = +\infty$.