Proposta de questões de avaliação

Matemática A

12.º ANO DE ESCOLARIDADE

Data:

1. Num cesto estão 15 peças de fruta, sendo 5 maçãs, 4 laranjas, 3 bananas, 2 pêssegos e uma meloa.
De quantas maneiras estas peças de fruta podem ser divididas por duas pessoas de tal modo que cada pessoa fique com uma peça de fruta, pelo menos?
Considere que as peças de fruta da mesma espécie não se distinguem.

(A) 120 **(B)** 118 **(C)** 720 **(D)** 718

2. O Constantino criou uma palavra-passe de acesso ao seu computador, trocando a ordem a letras do seu nome.
Quando mais tarde precisou de a usar apenas se lembrava que as duas primeiras letras eram CO, por esta ordem.
Qual das seguintes expressões dá o número de palavras-passe que existem nestas condições?

(A) ${}^{9}A_4 \times {}^{5}C_2$

(B) ${}^{11}A_4 \times {}^{7}C_3 \times {}^{4}C_2$

(C) $\dfrac{9!}{3!}$

(D) $\dfrac{11!}{3! \times 2!}$

3. De quantas maneiras se podem colocar dois peões brancos e dois peões pretos nas 32 casas pretas de um tabuleiro de xadrez?
Considere que os peões só se distinguem pela cor e não são colocados mais do que um peão em cada casa.

(A) 71 920

(B) 215 760

(C) 863 040

(D) 984 064

4. Num debate participam representantes de sete partidos políticos, quatro dos quais apoiaram o último governo e os restantes três estiveram na oposição.
A ordem pela qual é efetuada a primeira intervenção no debate é sorteada.

Qual é a probabilidade de, nessa primeira participação no debate, pelo menos dois dos partidos da oposição intervirem um a seguir ao outro?

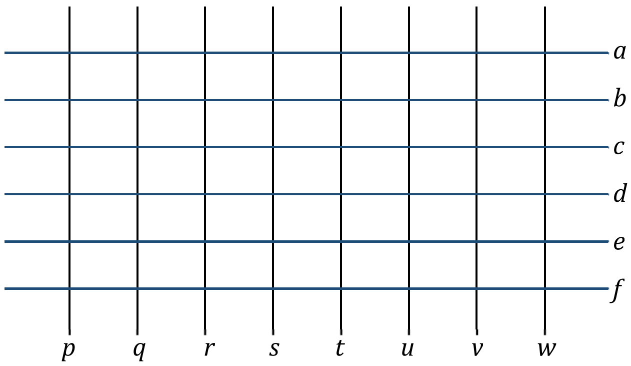
(A) $\dfrac{2}{7}$ **(B)** $\dfrac{3}{7}$ **(C)** $\dfrac{4}{7}$ **(D)** $\dfrac{5}{7}$

5. Quantos são os números naturais pares com cinco algarismos diferentes?

(A) 13 776 **(B)** 13 440

(C) 15 120 **(D)** 12 096

6. Na figura estão representados dois conjuntos de retas paralelas.



Sabe-se que:

- as seis retas *a*, *b*, *c*, *d*, *e* e *f* são paralelas entre si:
- as oito retas *p*, *q*, *r*, *s*, *t*, *u*, *v* e *w* são paralelas entre si e perpendiculares às primeiras.

Quantos retângulos são definidos por estas 14 retas?

(A) 48 **(B)** 420 **(C)** 168 **(D)** 448

7. Oito pessoas vão sentar-se escolhendo o lugar ao acaso numa fila de 10 cadeiras.

Qual é a probabilidade de que as duas cadeiras que ficam livres sejam seguidas?

(A) $\frac{4}{5}$ **(B)** $\frac{1}{5}$ **(C)** $\frac{8}{45}$ **(D)** $\frac{37}{45}$

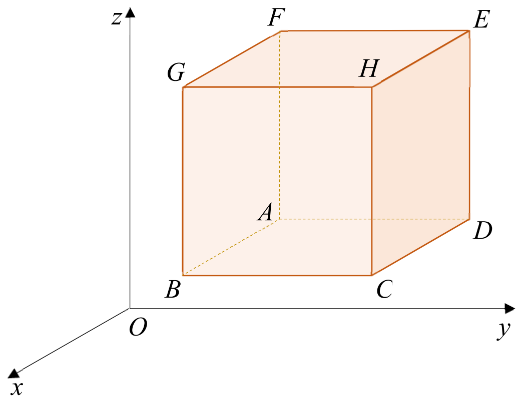
8. Dez amigos precisam de alugar dois ou mais automóveis para se deslocarem para o aeroporto. Estão apenas disponíveis três veículos: um de dois lugares, um de quatro lugares e um de cinco lugares.

Admitindo que todos podem conduzir, de quantas maneiras se podem dividir em grupos para ocuparem os três veículos?

(A) 786 240 **(B)** 241 920

(C) 6930 **(D)** 5472

9. No referencial $Oxyz$ da figura está representado o cubo $[ABCDEFGH]$ em que cada uma das faces é paralela a um dos planos coordenados.



Escolhendo, ao acaso, dois vértices do cubo, qual é a probabilidade de esses dois pontos definirem uma reta paralela a pelo menos um dos planos coordenados?

(A) $\frac{6}{7}$ **(B)** $\frac{5}{7}$ **(C)** $\frac{4}{7}$ **(D)** $\frac{3}{7}$

10. Uma pequena Escola C+S tem apenas duas turmas do 12.º ano:

- a turma A, da área de Ciências e Tecnologias, com 24 alunos, sendo 8 raparigas e 16 rapazes;
- e a turma B, da área de Línguas e Humanidades, com 14 raparigas e 10 rapazes.

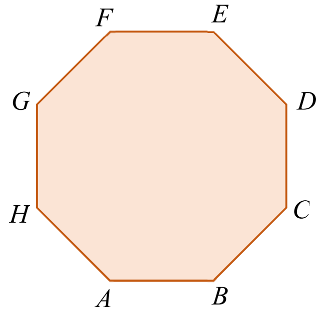
Pretende-se constituir uma comissão de quatro alunos do 12.º ano para organizar um passeio.
A comissão deve ter dois alunos de cada turma e ter tantos rapazes como raparigas.
Quantas comissões diferentes se podem constituir?

(A) 17 920 **(B)** 25 868

(C) 30 100 **(D)** 12 180

11. Escolhem-se, ao acaso, quatro vértices do octógono regular $[ABCDEFGH]$.

Qual é a probabilidade de esses quatro pontos serem vértices de um quadrado?



(A) $\frac{1}{70}$ **(B)** $\frac{4}{35}$

(C) $\frac{2}{35}$ **(D)** $\frac{1}{35}$

12. No sorteio de totoloto são extraídas 5 bolas de uma tômbola com 45 bolas numeradas de 1 a 49.

Em qual das opções seguintes se apresenta, na forma de percentagem com arredondamento às centésimas, a probabilidade de o menor número saído ser 1 e o maior ser 49?

(A) $0,97\ \%$ **(B)** $0,91\ \%$

(C) $0,85\ \%$ **(D)** $0,80\ \%$

13. Um dos termos do desenvolvimento de $\left(2x-\sqrt{x}\right)^{10}$ é um monómio da forma kx^7.

O valor de k é

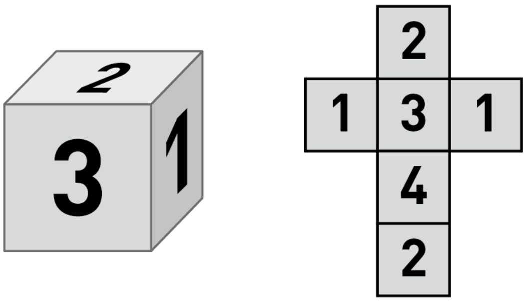
(A) -8064 **(B)** -960 **(C)** 210 **(D)** 3360

14. O terceiro elemento de uma linha do triângulo de Pascal é igual a 300 e o terceiro elemento da linha seguinte é igual a 325.

Escolhe-se, ao acaso, um elemento da primeira dessas duas linhas. Qual é a probabilidade de esse elemento ser superior a 10 000?

(A) $\frac{9}{13}$ **(B)** $\frac{11}{13}$ **(C)** $\frac{17}{25}$ **(D)** $\frac{21}{25}$

15. Na figura, está representado um dado **não equilibrado** e um esquema da sua planificação.



Lança-se este dado uma vez.

Sejam A e B os acontecimentos:

A: "Sair número primo"

B: "Sair número par"

Sabendo que $P\left(A\cup B\right)=\frac{3}{4}$, a probabilidade de sair a face com o número 1 é

(A) $\frac{1}{4}$ **(B)** $\frac{1}{3}$ **(C)** $\frac{1}{12}$ **(D)** $\frac{1}{2}$

Proposta de resolução

1. Há seis maneiras de distribuir as 5 maçãs (5-0, 4-1, 3-2, 2-3, 1-4 e 0-5). Da mesma forma, há cinco maneiras para distribuir as 4 laranjas, quatro maneiras para distribuir as 3 bananas, três maneiras para distribuir os 2 pêssegos e duas maneiras de distribuir a meloa.

Há, portanto, $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 720$ maneiras de distribuir as peças de fruta pelas duas pessoas.

Como se pretende que cada pessoa fique com pelo menos uma peça de fruta, temos de excluir os dois casos correspondentes a uma das pessoas ficar com a fruta toda e a outra com nenhuma.

Assim, há $720 - 2 = 718$ maneiras de dividir as peças de fruta pelas duas pessoas de tal modo que cada uma fique com uma peça de fruta, pelo menos.

Resposta: (D)

2. C O $\boxed{\text{N S T A N T I N O}}$

Trata-se do número de sequências que é possível obter trocando a ordem às letras NSTANTINO, ou seja, S A I O T T N N N

Esse número é dado por ${}^{9}A_4 \times {}^{5}C_2 = 30\,240$

Número de maneiras de escolher os lugares das duas letras T (iguais) entre os cinco lugares restantes. Os restantes três lugares na sequência são ocupados pelas letras N.

Número de maneiras de escolher os quatro lugares das letras SAIO entre os nove lugares da sequência

Outras opções: ${}^{9}C_3 \times {}^{6}C_2 \times 4! = 30\,240 = \dfrac{9!}{3! \times 2!}$

Resposta: (A)

3. ${}^{32}C_2 \times {}^{30}C_2 = 215\,760$

Número de maneiras de escolher duas casas para os peões brancos entre as restantes 30 casas.

Número de maneiras de escolher duas casas para os peões pretos entre as 32 casas pretas

Resposta: (B)

4. Número de casos possíveis:

${}^{7}C_3 \times {}^{4}C_4 = 35$ — O — — O O —

Número de maneiras de escolher o lugar dos partidos da oposição na sequência das sete intervenções

Número de casos favoráveis ao acontecimento contrário (não haver intervenções dos partidos de oposição seguidas):

${}^{5}C_3 = 10$ $\underset{1}{-}\,G\underset{2}{-}G\underset{3}{-}G\underset{4}{-}G\underset{5}{-}$

Há 5 lugares possíveis (entre os partidos da coligação, no início ou no fim) para escolher 3 para os partidos da oposição de forma que não fiquem dois seguidos.

A probabilidade pedida é:

$$P = 1 - \frac{10}{35} = 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$$

Resposta: (D)

5. Números terminados em 0:

$$\underset{9}{\underline{1.^{\text{o}} A}}\ \underset{8}{\underline{2.^{\text{o}} A}}\ \underset{7}{\underline{3.^{\text{o}} A}}\ \underset{6}{\underline{4.^{\text{o}} A}}\ \underset{1}{\underline{0}}$$

O algarismo 0 está no fim.

Números terminados em 2, 4, 6 ou 8:

$$\underset{8}{\underline{1.^{\text{o}} A}}\ \underset{8}{\underline{2.^{\text{o}} A}}\ \underset{7}{\underline{3.^{\text{o}} A}}\ \underset{6}{\underline{4.^{\text{o}} A}}\ \underset{4}{\underline{2,4,6,8,}}$$

Sai o algarismo 0 e o algarismo do fim (2, 4, 6 ou 8).

Número pedido:

$$9\times8\times7\times6\times1+8\times8\times7\times6\times4=13\,776$$

Resposta: (A)

6. Cada retângulo é definido por duas retas horizontais escolhidas entre as seis retas do conjunto $\{a, b, c, d, e, f\}$ e duas retas verticais escolhidas ente as oito retas do conjunto $\{p, q, r, s, t, u, v, w\}$.

O número de retângulos é dado por ${}^{6}C_2 \times {}^{8}C_2 = 15\times28 = 420$.

Resposta: (B)

7. Número de casos possíveis:

$${}^{10}C_8 = {}^{10}C_2 = 45$$

(número de maneiras de escolher 8 cadeiras entre as 10 disponíveis)

Número de casos favoráveis: 9

(há nove possibilidades para intercalar as duas cadeiras livres antes das oito pessoas, entre as oito pessoas ou depois das oito pessoas: $\underset{1}{-}P\underset{2}{-}P\underset{3}{-}P\underset{4}{-}P\underset{5}{-}P\underset{6}{-}P\underset{7}{-}P\underset{8}{-}P\underset{9}{-}$)

$$P=\frac{9}{45}=\frac{1}{5}$$

Resposta: (B)

8. Os dez amigos podem dividir-se em três grupos com as seguintes dimensões:

$\frac{A2}{1}\ \frac{A4}{4}\ \frac{A5}{5}$ ou $\frac{A2}{2}\ \frac{A4}{4}\ \frac{A5}{4}$ ou $\frac{A2}{2}\ \frac{A4}{3}\ \frac{A5}{5}$, sendo $A2$, $A4$ e $A5$ os automóveis de 2, 4 e 5 lugares, respetivamente, o que corresponde a

$${}^{10}C_1\times{}^{9}C_4\times{}^{5}C_5+{}^{10}C_2\times{}^{8}C_4\times{}^{4}C_4+{}^{10}C_2\times{}^{8}C_3\times{}^{5}C_5=6930$$

Os dez amigos podem dividir-se em três grupos de 6930 maneiras.

Resposta: (C)

9. Número de casos possíveis: ${}^{8}C_2 = 28$

Número de casos favoráveis; $28 - 4 = 24$ (Apenas as retas AH, BE, CF e DG que contém as diagonais espaciais do cubo não são paralelas a qualquer um dos planos coordenados).

A probabilidade pedida é $P = \frac{24}{28} = \frac{6}{7}$

Resposta: (A)

10. Há as seguintes possibilidades (HA significa rapazes da turma A, MB significa raparigas da turma B …):

HA	HB	MA	MB	
16	10	8	14	
2	0	0	2	(Dois rapazes da turma A e duas raparigas da turma B)
0	2	2	0	(Dois rapazes da turma B e duas raparigas da turma A)
1	1	1	1	(Um rapaz e uma rapariga de cada turma)

O número de maneiras de formar estas comissões é dado por

${}^{16}C_2 \times {}^{14}C_2 + {}^{10}C_2 \times {}^{8}C_2 + {}^{16}C_1 \times {}^{10}C_1 \times {}^{8}C_1 \times {}^{14}C_1 = 30\,100$

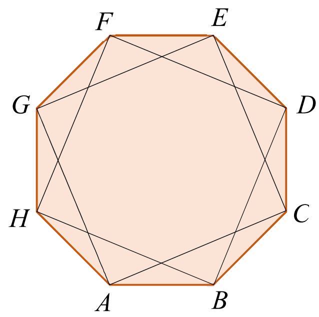
Resposta: (C)

11. Número de casos possíveis: ${}^{8}C_4 = 70$

Número de casos favoráveis: 2 ($[ACEG]$ e $[BDFH]$)

A probabilidade pedida é $P = \frac{2}{70} = \frac{1}{35}$

Resposta: (D)



12. Número de casos possíveis: ${}^{49}C_5$

Número de casos favoráveis: ${}^{47}C_3$

(para além dos números 1 e 49, são escolhidos mais três entre os restantes 47)

A probabilidade pedida é $P = \frac{{}^{47}C_3}{{}^{49}C_5} = \frac{5}{588} \approx 0{,}0085 \approx 0{,}85\,\%$

Resposta: (C)

13. $\left(2x-\sqrt{x}\right)^{10}=\sum_{p=0}^{10}{}^{10}C_p\left(2x\right)^{10-p}\left(-\sqrt{x}\right)^p=$

$T_{p+1}={}^{10}C_p\times 2^{10-p}x^{10-p}\left(-1\right)^p\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^p={}^{10}C_p\times 2^{10-p}\times\left(-1\right)^p x^{10-p}x^{\frac{p}{2}}=$

$={}^{10}C_p\times 2^{10-p}\times\left(-1\right)^p x^{10-p+\frac{p}{2}}$

Se ${}^{10}C_p\times 2^{10-p}\times\left(-1\right)^p x^{10-p+\frac{p}{2}}=kx^7$, temos $10-p+\dfrac{p}{2}=7\wedge k={}^{10}C_p\times 2^{10-p}\times\left(-1\right)^p$.

$10-p+\dfrac{p}{2}=7\Leftrightarrow\dfrac{-2p+p}{2}=-3\Leftrightarrow -p=-6\Leftrightarrow p=6$

$k={}^{10}C_6\times 2^{10-6}\times\left(-1\right)^6=210\times 2^4\times 1=3360$

Resposta: (D)

14.

1	n	300	...
1	$n+1$	325	...

$n+300=325\Leftrightarrow n=25$

A linha em causa é a correspondente a $n=25$ pelo que tem 26 elementos.

O quarto elemento dessa linha é ${}^{25}C_3=2300$ e o quinto elemento é ${}^{25}C_4=12\,650$.

$\boxed{1\;\;25\;\;300\;\;2300}\;\;12\,650\;\;\ldots\;\;12\,650\;\;\boxed{2300\;\;300\;\;25\;\;1}$

Apenas os quatro primeiros elementos e os quatro últimos são inferiores a 10 000.

Logo:

Número de casos possíveis: 26

Número de casos favoráveis: $26-8=18$

A probabilidade pedida é $P=\dfrac{18}{26}=\dfrac{9}{13}$.

Resposta: (A)

15. A: "Sair número primo"

B: "Sair número par"

$A=\{2,3\}$ e $B=\{2,4\}$

$A\cup B=\{2,3,4\}$

$P\left(\{1,2,3,4\}\right)=1$

$P\left(\{1\}\right)+P\left(\{2,3,4\}\right)=1$ | $P\left(\{2,3,4\}\right)=P\left(A\cup B\right)=\dfrac{3}{4}$

$P\left(\{1\}\right)+\dfrac{3}{4}=1\Leftrightarrow P\left(\{1\}\right)=1-\dfrac{3}{4}\Leftrightarrow P\left(\{1\}\right)=\dfrac{1}{4}$

Resposta: (A)