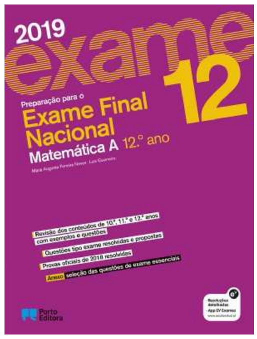


Proposta de prova-modelo

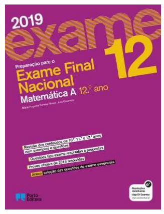
Matemática A

12.º ANO DE ESCOLARIDADE

Duração: (Caderno 1 + Caderno 2): 150 minutos. Tolerância: 30 minutos

---

Porto Editora



Caderno 1: 75 minutos. Tolerância:15 minutos

(é permitido o uso de calculadora)

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

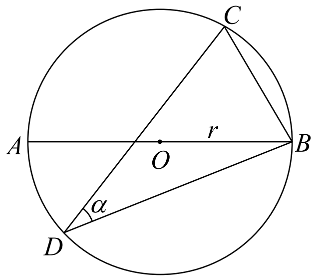
Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato

---

1. Na figura está representada uma circunferência de centro O e raio r .

Sabe-se que:

- $[AB]$ é um diâmetro da circunferência;
- Os pontos C e D pertencem à circunferência;
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo BDC com $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.



O comprimento da corda $[BC]$ é igual a:

(A) $2r\sin\alpha$ **(B)** $2r\sin(2\alpha)$

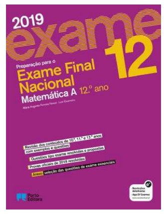
(C) $r\sin\alpha$ **(D)** $r\sin(2\alpha)$

2. Considere um departamento de uma empresa onde trabalham oito homens e doze mulheres. Neste departamento vão ser escolhidos, entre todos os trabalhadores, dois homens e três mulheres para desempenharem tarefas distintas. Qualquer um dos vinte trabalhadores pode desempenhar qualquer uma das cinco tarefas.

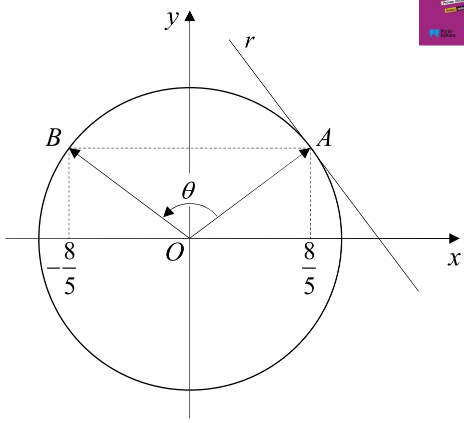
De quantas maneiras pode ser feita a escolha dos cinco trabalhadores e a distribuição das respetivas tarefas?

(A) 73 920 **(B)** 6160

(C) 739 200 **(D)** 8 870 400



3. Na figura, está representada, num referencial ortonormado xOy, a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 4$.



Sabe-se que:

- A e B são os pontos da circunferência de ordenadas positivas e abcissas $\frac{8}{5}$ e $-\frac{8}{5}$, respetivamente;
- a reta r é tangente à circunferência no ponto A;
- θ é a amplitude, em radianos, do ângulo formado pelos vetores $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$.

3.1. Qual das equações seguintes define a reta r?

(A) $y = -\frac{4}{3}x + \frac{16}{5}$ **(B)** $y = -\frac{4}{3}x + \frac{10}{3}$

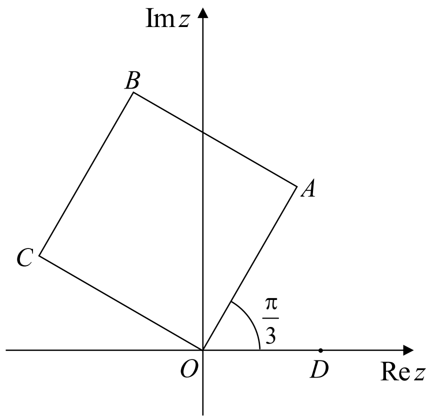
(C) $y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{2}$ **(D)** $y = -\frac{3}{4}x + \frac{12}{5}$

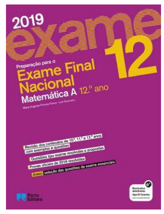
3.2. Determine $\tan\theta$.

4. O núcleo de remo de uma escola C+S, formado por sete alunos do ensino básico e catorze do secundário, vai escolher a equipa para participar numa prova de *Quatro com Timoneiro.*
Sabe-se que o timoneiro é o aluno do ensino básico com menos *peso*. Os quatro remadores serão escolhidos entre os restantes.
Se a escolha for feita por sorteio, qual é a probabilidade de entre os escolhidos haver pelo menos um remador de cada nível de ensino?
Apresente o resultado na forma de percentagem, com arredondamento às décimas.

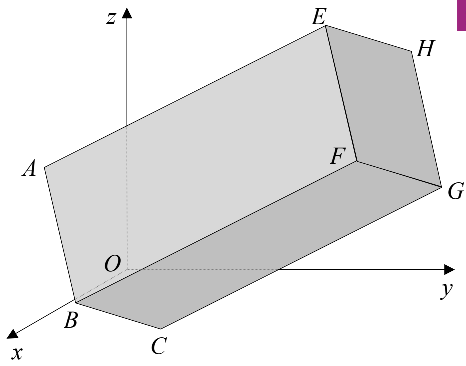
5. Na figura está representado, no plano complexo, o quadrado $[OABC]$ (O é a origem do referencial), bem como o ponto D de coordenadas $(5, 0)$.
Sabendo que $\overline{AD} = 7$ e que a amplitude do ângulo DOA é igual a $\frac{\pi}{3}$ radianos, mostre que o ponto C é o afixo do número complexo $z = -4\sqrt{3} + 4\mathrm{i}$.

Sugestão: Comece por calcular $\overline{OA}$ recorrendo ao teorema de Carnot.





6. Na figura está representado, em referencial ortonormado $Oxyz$, o prisma quadrangular regular $[ABCDEFGH]$ (o vértice D não é visível).



Sabe-se que:

- O ponto E tem coordenadas $(4, 14, 16)$;
- O plano ABC pode ser definido pela equação $x - 8y - 4z + 10 = 0$;

6.1. Defina por uma equação vetorial a reta AE.

6.2. Determine as coordenadas do ponto A.

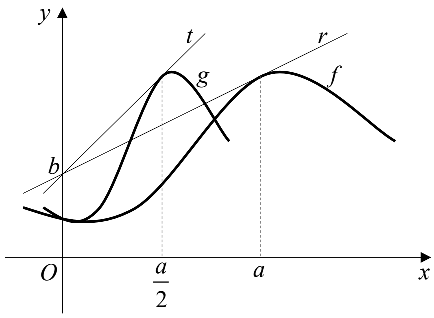
6.3. Escolhem-se, ao acaso, três vértices distintos do prisma. Qual é a probabilidade de o plano definido por esses três vértices conter uma face do prisma?

(A) $\frac{3}{28}$ **(B)** $\frac{1}{14}$ **(C)** $\frac{3}{8}$ **(D)** $\frac{3}{7}$

7. Seja f uma função diferenciável em $\mathbb{R}$ e seja g a função definida em $\mathbb{R}$ por $g(x) = f(2x)$.

Admita que a reta r de equação $y = mx + b$ é tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa a.

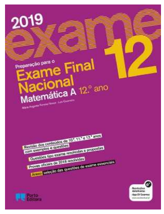
Mostre que a reta t, tangente ao gráfico da função g no ponto de abcissa $\frac{a}{2}$, pode ser definida pela equação $y = 2mx + b$.



Fim do Caderno 1

COTAÇÕES (Caderno 1)

Item										
Cotação (em pontos)										
1.	**2.**	**3.1.**	**3.2.**	**4.**	**5.**	**6.1.**	**6.2.**	**6.3.**	**7.**	
8	8	8	11	11	12	10	12	8	12	**100**



Caderno 2: 75 minutos. Tolerância:15 minutos

(não é permitido o uso de calculadora)

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identificam a opção escolhida.

---

8. Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida, para determinado número real k, por:

$$g(x)=\frac{k+2x\mathrm{e}^{x-1}}{2}$$

Determine o valor de k sabendo que a reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 1 passa na origem do referencial.

9. Considere a sucessão (u_n) de termo geral $u_n=\log_2(2n+1)-\log_2(n+2)$

O valor de $\lim u_n$ é:

(A) 2 **(B)** 1 **(C)** 0 **(D)** $+\infty$

10. Sabe-se que f é uma função real de variável real tal que $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{\sin(2x)}=2$.

Qual das seguintes afirmações é necessariamente verdadeira?

(A) $f'(0)=1$

(B) $f'(0)=2$

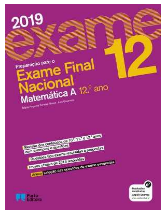
(C) $f'(0)=4$

(D) $f(0)$ é um extremo relativo de f

11. Seja h, a função de domínio $]-1,+\infty[$, definida por $h(x)=1-x-\ln(x+1)$.

11.1. Verifique se o gráfico da função h admite assíntota não vertical.

11.2. Estude a função h quanto ao sentido da concavidade do gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.



12. Considere a função f, de domínio $[-\pi, \pi]$, definida por $f(x) = 2x\cos(2x) - \sin(2x)$.

12.1. Determine $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x}$.

12.2. Estude a função f quanto à monotonia e determine, caso existam, os extremos relativos.

13. Considere a sucessão (u_n) definida por:

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ 3u_{n+1} = 2u_n \text{ , qualquer que seja } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Relativamente a esta sucessão qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) (u_n) é monótona crescente

(B) Sendo S_n a soma dos n primeiros termos de (u_n) então $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$

(C) (u_n) é convergente

(D) $\lim u_n = +\infty$

14. De uma progressão aritmética, (a_n), sabe-se que o primeiro termo é igual a 10 e que a soma dos primeiros 101 termos é igual a zero.
Determine uma expressão do termo geral desta sucessão.

15. Seja z um número complexo não nulo, cujo afixo, no plano complexo, pertence ao segundo quadrante e à bissetriz dos quadrantes pares.

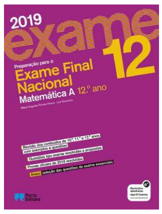
Qual dos seguintes pode ser um valor de $n \in \mathbb{N}$ para o qual $(iz)^n$ é um número real positivo?

(A) 6 **(B)** 8 **(C)** 10 **(D)** 12

Fim da prova

COTAÇÕES (Caderno 2)

Item										
Cotação (em pontos)										
8.	**9.**	**10.**	**11.1.**	**11.2.**	**12.1.**	**12.2.**	**13.**	**14.**	**15.**	
12	8	8	11	12	10	12	8	11	8	**100**
TOTAL (Caderno 1 + Caderno 2)										**200**



Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência: αr
(α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;*
r – raio)

Áreas de figuras planas

Polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Setor circular: $\dfrac{\alpha r^2}{2}$

(α *– amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)*

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$

(*r – raio da base*; *g – geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$

(*r – raio*)

Volumes

Pirâmide: $\dfrac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Cone: $\dfrac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Esfera: $\dfrac{4}{3}\pi r^3$ *(r – raio)*

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\dfrac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \dfrac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\sin\,(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos\,(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\dfrac{\sin A}{a} = \dfrac{\sin B}{b} = \dfrac{\sin C}{c}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$ ou $(\rho\, e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\dfrac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ ou $\sqrt[n]{\rho\, e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$

$(k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\sin u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

$(\tan u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

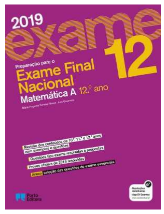
$\lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

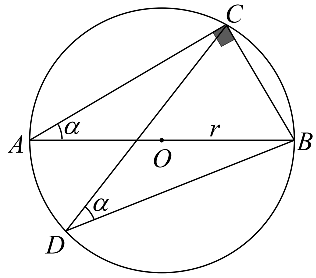


Proposta de resolução

Caderno 1

1. Como os ângulos inscritos no mesmo arco de circunferência têm a mesma amplitude, temos que $B\hat{A}C = B\hat{D}C = \alpha$.

Por outro lado, dado que um ângulo inscrito numa semicircunferência é um ângulo reto, o triângulo $[ABC]$ é retângulo em C.



Logo, $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \sin\alpha \Leftrightarrow \dfrac{\overline{BC}}{2r} = \sin\alpha \Leftrightarrow \overline{BC} = 2r\sin\alpha$

Resposta: **(A)**

2. ${}^{8}C_2 \times {}^{12}C_3 \times 5! = 739\,200$

- $5!$ → Número de maneiras de distribuir as funções pelos 5 trabalhadores escolhidos
- ${}^{12}C_3$ → Número de maneiras de escolher três mulheres entre as 12
- ${}^{8}C_2$ → Número de maneiras de escolher dois homens entre os 8

Resposta: **(C)**

3. $x^2 + y^2 = 4$

Se $x = \pm\dfrac{8}{5}$ vem $\left(\pm\dfrac{8}{5}\right)^2 + y^2 = 4 \Leftrightarrow y^2 = 4 - \dfrac{64}{25} \Leftrightarrow y^2 = \dfrac{36}{25} \Leftrightarrow y = \pm\dfrac{6}{5}$

Logo, $A\left(\dfrac{8}{5}, \dfrac{6}{5}\right)$ e $B\left(-\dfrac{8}{5}, \dfrac{6}{5}\right)$.

3.1. $\overrightarrow{OA} = A - O = \left(\dfrac{8}{5}, \dfrac{6}{5}\right)$

Declive de $OA = \dfrac{\frac{6}{5}}{\frac{8}{5}} = \dfrac{6}{8} = \dfrac{3}{4}$

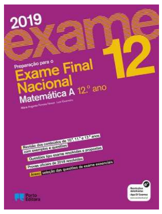
Como a reta r é perpendicular a OA, o seu declive é $m = -\dfrac{4}{3}$.

A reta r tem declive $m = -\dfrac{4}{3}$ e passa no ponto $A\left(\dfrac{8}{5}, \dfrac{6}{5}\right)$.

Uma equação de r é

$$y - \frac{6}{5} = -\frac{4}{3}\left(x - \frac{8}{5}\right) \Leftrightarrow y = -\frac{4}{3}x + \frac{32}{15} + \frac{6}{5} \Leftrightarrow y = -\frac{4}{3}x + \frac{10}{3}$$

Resposta: **(B)**



3.2. $\overrightarrow{OB} = B - O = \left(-\frac{8}{5}, \frac{6}{5}\right)$

$\left\|\overrightarrow{OA}\right\| = \left\|\overrightarrow{OB}\right\| = 2$ (raio da circunferência)

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \left(\frac{8}{5}, \frac{6}{5}\right) \cdot \left(-\frac{8}{5}, \frac{6}{5}\right) = -\frac{64}{25} + \frac{36}{25} = -\frac{28}{25}$$

$$\cos\theta = \cos\left(\overrightarrow{OA}\,\hat{,}\,\overrightarrow{OB}\right) = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{\left\|\overrightarrow{OA}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{OB}\right\|} = \frac{-\frac{28}{25}}{2 \times 2} = -\frac{28}{4 \times 25} = -\frac{7}{25}$$

$$1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\left(-\frac{7}{25}\right)^2} \Leftrightarrow 1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\frac{49}{625}} \Leftrightarrow \tan^2\theta = \frac{625}{49} - 1 \Leftrightarrow \quad \left|\; 1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}\right.$$

$$\Leftrightarrow \tan^2\theta = \frac{576}{49} \Leftrightarrow \tan\theta = \pm\frac{24}{7}$$

Como $\cos\theta < 0$, θ é do 2.º quadrante. Logo, $\tan\theta = -\frac{24}{7}$.

4. Os quatro remadores serão escolhidos entre 20 elementos, sendo seis do ensino básico e catorze do secundário.

O número de casos possíveis é dado por: ${}^{20}C_4 = 4845$

Número de casos favoráveis:

${}^{6}C_3 \times {}^{14}C_1 + {}^{6}C_2 \times {}^{14}C_2 + {}^{6}C_1 \times {}^{14}C_3 = 20 \times 14 + 15 \times 91 + 6 \times 364 = 3829$

ou

${}^{20}C_4 - {}^{6}C_4 - {}^{14}C_4 = 4845 - 15 - 1001 = 3829$

B	S	
6	14	20
4	0	4
3	**1**	
2	**2**	
1	**3**	
0	4	

A probabilidade pedida é dada por:

$$P = \frac{3829}{4845} \approx 0,7903 \approx 79,0\%$$

5. Aplicando o teorema de Carnot ao triângulo $[ODA]$, com $\overline{AD} = 7$, $\overline{OD} = 5$ e $\overline{OA} = a$ temos:

$$7^2 = 5^2 + a^2 - 2 \times 5 \times a \times \cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow$$

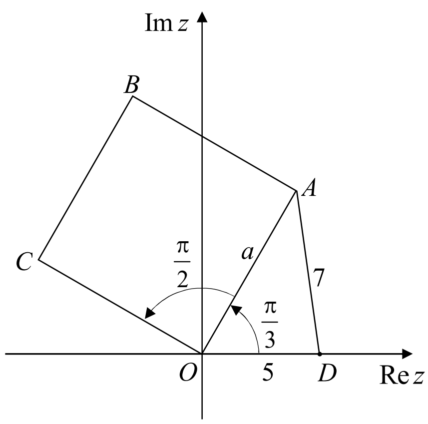
$$\Leftrightarrow 49 = 25 + a^2 - 2 \times 5 \times a \times \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 = 25 - 49 + a^2 - 5a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 5a - 24 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 4 \times 24}}{2} \Leftrightarrow a = \frac{5 \pm \sqrt{121}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{5 \pm 11}{2} \Leftrightarrow a = -3 \vee a = 8$$



Como $a>0$, temos $\overline{OA}=a=8$.

O ponto A é o afixo do número complexo cujo módulo é igual a 8 e cujo argumento é $\frac{\pi}{3}$.

Logo, como $\overline{OC}=\overline{OA}=8$ e $D\hat{O}C=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}=\frac{2\pi+3\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$, C é o afixo do número complexo cujo módulo é igual a 8 e cujo argumento é $\frac{5\pi}{6}$.

Portanto, $z=8e^{i\frac{5\pi}{6}}=8\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)=8\left[\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)\right]=$

$$=8\left(-\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=8\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=-4\sqrt{3}+4i$$

6. $E(4,14,16)$; $ABC:\ x-8y-4z+10=0$;

6.1. A reta AE passa no ponto $E(4,14,16)$ e é perpendicular ao plano ABC.

O vetor de coordenadas $(1,-8,-4)$ é perpendicular ao plano ABC. Logo é um vetor diretor da reta AE.

Equação vetorial da reta AE: $(x,y,z)=(4,14,16)+k(1,-8,-4),\ k\in\mathbb{R}$.

6.2. A reta AE interseta o plano ABC no ponto A.

$(x,y,z)=(4,14,16)+k(1,-8,-4),\ k\in\mathbb{R}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(x,y,z)=(4+k,14-8k,16-4k),\ k\in\mathbb{R}$

Logo, qualquer ponto da reta AE é da forma $(4+k,\ 14-8k,\ 16-4k),\ k\in\mathbb{R}$

O ponto A é o ponto da reta AE que pertence ao plano ABC. Logo, as suas coordenadas satisfazem a equação $x-8y-4z+10=0$, ou seja:

$(4+k)-8(14-8k)-4(16-4k)+10=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4+k-112+64k-64+16k+10=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 81k=162\Leftrightarrow k=2$

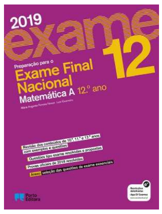
Portanto, o ponto A tem coordenadas $(4+2,\ 14-8\times2,\ 16-4\times2)$, ou seja, $A(6,\ -2,\ 8)$

6.3. Número de casos possíveis: ${}^{8}C_{3}=56$

Número de casos favoráveis: $6\times{}^{4}C_{3}=6\times4=24$ (O prisma tem 6 faces e os quatro vértices de cada face definem o mesmo plano)

$$P=\frac{24}{56}=\frac{3\times8}{7\times8}=\frac{3}{7}$$

Resposta: **(D)**



7. Ponto de tangência da reta r: $R(a\,,f(a))$

Como o ponto $(a\,,f(a))$ também pertence à reta $r: y = mx + b$ vem $f(a) = ma + b$ (1)

Declive da reta r: $m = f'(a)$

Ponto de tangência da reta t: $T\left(\frac{a}{2}\,,g\left(\frac{a}{2}\right)\right)$ sendo $g\left(\frac{a}{2}\right) = f\left(2\times\frac{a}{2}\right) = f(a)$

Logo, T tem coordenadas $\left(\frac{a}{2}\,,f(a)\right)$.

Declive da reta t: $g'\left(\frac{a}{2}\right)$

$$g'(x) = (f(2x))' = (2x)'\,f'(2x) = 2f'(2x)$$

$$g'\left(\frac{a}{2}\right) = 2f'\left(2\times\frac{a}{2}\right) = 2f'(a) = 2m$$

Portanto, a reta t passa no ponto de coordenadas $\left(\frac{a}{2}\,,f(a)\right)$ e tem declive $2m$.

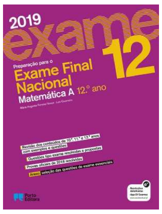
A reta t pode ser definida por:

$$y - f(a) = 2m\times\left(x - \frac{a}{2}\right) \Leftrightarrow y = 2mx - 2m\times\frac{a}{2} + f(a) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = 2mx - ma + ma + b \Leftrightarrow y = 2mx + b$$

Em (1), vimos que:
$f(a) = ma + b$

Logo, a reta t, tangente ao gráfico da função g no ponto de abcissa $\frac{a}{2}$, pode ser definida pela equação $y = 2mx + b$.



Caderno 2

8. Seja $y = mx + b$ a equação reduzida da reta t, tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 1.

Sabemos que:

$m = g'(1)$

$b = 0$, dado que a reta t passa na origem do referencial.

$$g'(x) = \left(\frac{k + 2x\mathrm{e}^{x-1}}{2}\right)' = \left(\frac{k}{2} + x\mathrm{e}^{x-1}\right)' = 0 + x'\mathrm{e}^{x-1} + x\left(\mathrm{e}^{x-1}\right)' = \mathrm{e}^{x-1} + x\mathrm{e}^{x-1} = (1+x)\mathrm{e}^{x-1}$$

$m = g'(1) = (1+1)\mathrm{e}^{1-1} = 2$

A equação da reta t é $y = 2x$.

O ponto de tangência tem abcissa 1 e também pertence à reta t. Logo, a ordenada desse ponto é $y = 2 \times 1 = 2$.

Como o ponto de tangência, de coordenadas $(1, 2)$, pertence ao gráfico de g, temos que:

$$g(1) = 2 \Leftrightarrow \frac{k + 2 \times 1 \times \mathrm{e}^{1-1}}{2} = 2 \Leftrightarrow \frac{k+2}{2} = 2 \Leftrightarrow k + 2 = 4 \Leftrightarrow k = 2$$

9. $\lim u_n = \lim\left[\log_2(2n+1) - \log_2(n+2)\right] \overset{(\infty-\infty)}{=}$

$$= \lim \log_2\left(\frac{2n+1}{n+2}\right) = \log_2 2 = 1 \text{ dado que } \lim\frac{2n+1}{n+2} = \lim\frac{2n}{n} = 2$$

Resposta: **(B)**

10. $$\lim_{x\to 0}\frac{f(x) - f(0)}{\sin(2x)} = 2 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x} \times \frac{x}{\sin(2x)}\right] = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \times \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin(2x)} = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(0) \times \lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin(2x)}{x}} = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(0) \times \frac{1}{2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{2x}} = 2 \Leftrightarrow$$

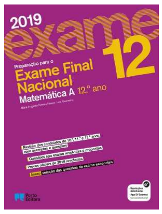
$y = 2x$
Se $x \to 0$, $y \to 0$

$$\Leftrightarrow f'(0) \times \frac{1}{2\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}} = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(0) \times \frac{1}{2 \times 1} = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(0) = 4$$

Resposta: **(C)**



11. $h(x)=1-x-\ln(x+1)$

11.1. Dado que $D_h=]-1,+\infty[$ apenas poderá existir assíntota não vertical quando $x\to+\infty$.

Seja $y=mx+b$ a equação dessa assíntota, caso exista.

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-x-\ln(x+1)}{x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{x}-\frac{\ln(x+1)}{x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}-1-\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}0-1-\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left[x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]}{x}=$$

$$=-1-\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x}=-1-\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}-\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x}=$$

$$=-1-0-0=-1$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left[h(x)-mx\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[1-x-\ln(x+1)+x\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[1-\ln(x+1)\right]=1-\infty=-\infty$$

Como $b\notin\mathbb{R}$, o gráfico de h não tem assíntotas não verticais.

11.2. $h'(x)=\left[1-x-\ln(x+1)\right]'=0-1-\dfrac{(x+1)'}{x+1}=-1-\dfrac{1}{x+1}$

$$h''(x)=\left(-1-\frac{1}{x+1}\right)'=0-\frac{-1}{(x+1)^2}=\frac{1}{(x+1)^2}$$

$$\frac{1}{(x+1)^2}>0,\ \forall x\in]-1,+\infty[$$

Como $h''(x)>0,\ \forall x\in]-1,+\infty[$, podemos concluir que o gráfico da função h tem a concavidade voltada para cima em todo o domínio e que, portanto, não tem pontos de inflexão.

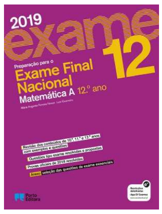
12. $f(x)=2x\cos(2x)-\sin(2x)$

12.1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x\cos(2x)-\sin(2x)}{x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2x\cos(2x)}{x}-\dfrac{\sin(2x)}{x}\right)=$

$$=\lim_{x\to0}\left[2\cos(2x)\right]-\lim_{x\to0}\frac{\sin(2x)}{x}=2\times1-2\lim_{x\to0}\frac{\sin(2x)}{2x}=$$

$y=2x$
Se $x\to0,\ y\to0$

$$=2-2\lim_{y\to0}\frac{\sin y}{y}=2-2\times1=0$$



12.2. $f'(x)=\left[2x\cos(2x)-\sin(2x)\right]'=\left[2x\cos(2x)\right]'-\left[\sin(2x)\right]'=$

$$=(2x)'\cos(2x)+2x\left[\cos(2x)\right]'-(2x)'\cos(2x)=$$

$$=2\cos(2x)+2x(2x)'\left[-\sin(2x)\right]-2\cos(2x)=$$

$$=2\cos(2x)-2x\times 2\sin(2x)-2\cos(2x)=$$

$$=-4x\sin(2x)$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow -4x\sin(2x)=0\wedge x\in[-\pi,\pi]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[-4x=0\vee\sin(2x)=0\right]\wedge 2x\in[-2\pi,2\pi]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(x=0\vee 2x=k\pi\,,\,k\in\mathbb{Z}\right)\wedge 2x\in[-2\pi,2\pi]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=0\vee 2x=-2\pi\vee 2x=-\pi\vee 2x=0\vee 2x=\pi\vee 2x=2\pi\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=-\pi\vee x=-\frac{\pi}{2}\vee x=0\vee x=\frac{\pi}{2}\vee x=\pi$$

$$f(-\pi)=-2\pi\cos(-2\pi)-\sin(-2\pi)=-2\pi$$

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-\pi\cos(-\pi)-\sin(-\pi)=\pi$$

$$f(0)=0\cos(0)-\sin(0)=0$$

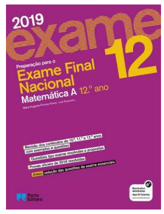
$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\pi\cos(\pi)-\sin(\pi)=-\pi$$

$$f(\pi)=2\pi\cos(2\pi)-\sin(2\pi)=2\pi$$

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
f'	0	+	0	–	0	–	0	+	0
f	-2π	↗	π	↘	0	↘	$-\pi$	↗	2π
	Mín.		Máx.				Mín.		Máx.

A função f é estritamente crescente em $\left[-\pi,-\frac{\pi}{2}\right]$ e em $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ e é estritamente decrescente em $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

A função f admite mínimos relativos iguais a -2π e a $-\pi$ para $x=-\pi$ e $x=\frac{\pi}{2}$, respetivamente, e admite máximos relativos iguais a π e a 2π para $x=-\frac{\pi}{2}$ e $x=\pi$, respetivamente.



13. $\begin{cases} u_1 = 2 \\ 3u_{n+1} = 2u_n \,, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{3} u_n \,, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Logo, (u_n) é uma progressão geométrica de razão $r = \dfrac{2}{3}$ com $u_1 = 2$. Assim, $u_n = 2 \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$.

$$\lim u_n = \lim \left[2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \right] = 2 \times 0 = 0$$

(u_n) é convergente.

Resposta: **(C)**

14. $a_1 = 10$

$a_{101} = a_1 + (101-1) + r = 10 + 100r$

$S_{101} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{a_1 + a_{101}}{2} \times 101 = 0 \Leftrightarrow a_1 + a_{101} = 0 \Leftrightarrow$ $\quad | \; a_1 = 10$ e $a_{101} = 10 + 100r$

$\Leftrightarrow 10 + 10 + 100r = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 100r = -20 \Leftrightarrow r = -\dfrac{20}{100} \Leftrightarrow r = -\dfrac{1}{5}$

$a_n = a_1 + (n-1) \times r$

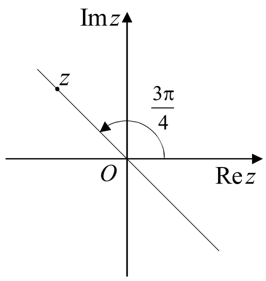
$a_n = 10 + (n-1) \times \left(-\dfrac{1}{5}\right) \Leftrightarrow a_n = 10 - \dfrac{1}{5}n + \dfrac{1}{5} \Leftrightarrow a_n = -\dfrac{1}{5}n + \dfrac{51}{5}$

$a_n = -\dfrac{1}{5}n + \dfrac{51}{5}$

15. $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$

$(\mathrm{i}z)^n = \left(\mathrm{i} \times r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}\right)^n = \left(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}\right)^n = \left(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{4}\right)}\right)^n =$

$= \left(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{4}}\right)^n = r^n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{4}\times n} = r^n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5n\pi}{4}}$



$(\mathrm{i}z)^n$ é um número real positivo $\Leftrightarrow \dfrac{5n\pi}{4} = 2k\pi \,, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{5n}{4} = 2k \,,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 5n = 8k \,,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n = \dfrac{8k}{5},\, k \in \mathbb{Z}$

$n \in \mathbb{N}$ se $k = 5, 10, 15, 20, \ldots$

Portanto, $n = 8, 16, 24, 32, \ldots$

Resposta: **(B)**