Proposta de teste de avaliação

Matemática A

12.º ANO DE ESCOLARIDADE

Duração: 90 minutos **| Data:**

Caderno 1

(é permitido o uso de calculadora)

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identificam a opção escolhida.

1. Seja f a função de domínio $[0, \pi]$ definida por $f(x) = x + \cos^4 x - \sin^4 x$

1.1. Mostre que $\forall x \in D_f, \; f(x) = x + \cos(2x)$.

1.2. Recorrendo à definição de derivada de uma função num ponto, determine $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

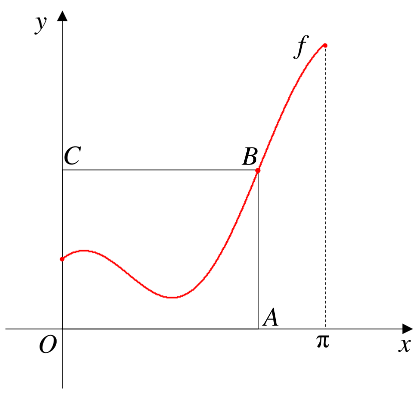
1.3. Qual das seguintes opções indica a abcissa de um ponto do gráfico de f em que a reta tangente é paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares?

(A) $\frac{\pi}{12}$ **(B)** $\frac{\pi}{4}$ **(C)** $\frac{\pi}{2}$ **(D)** $\frac{3\pi}{4}$

1.4. Estude a função f quanto ao sentido da concavidade do gráfico e à existência de pontos de inflexão.

1.5. Na figura está representado, em referencial ortonormado xOy, o gráfico da função f.

Os vértices A e C do retângulo $[OABC]$ pertencem aos semieixos positivos Ox e Oy, respetivamente. O vértice B pertence ao gráfico de f.



Sabendo que o retângulo $[OABC]$ tem medida de área igual a 5 u.a., recorra à calculadora gráfica para determinar um valor aproximado do comprimento da diagonal $[OB]$.

Na sua resposta deve:

- equacionar o problema;
- reproduzir o(s) gráfico(s) visualizado(s) na calculadora, incluindo o referencial;
- indicar o valor pedido arredondado às décimas.

2. Um capital de 10 000 euros foi colocado num banco à taxa anual nominal de $r\%$ no regime de juros compostos.

Ao fim de um ano, com capitalizações mensais, foi obtido um capital acumulado de 10 212 euros.

O valor de r, arredondado às centésimas, é:

(A) 2,12 **(B)** 2,11

(C) 2,10 **(D)** 2,09

Fim do Caderno 1

COTAÇÕES (Caderno 1)

Item						
Cotação (em pontos)						
1.1.	**1.2.**	**1.3.**	**1.4.**	**1.5.**	**2.**	
15	15	10	20	20	10	**90**

Caderno 2

(não é permitido o uso de calculadora)

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identificam a opção escolhida.

3. Considere, para um certo número real k, a função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por:

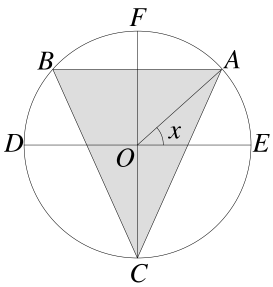
$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{k\sin(2-2x)}{x^2-x} & \text{se } 0<x<1 \\ \sqrt{x^2+3}+x & \text{se } x\geq 1 \end{cases}$$

3.1. Determine k sabendo que a função f é contínua em $x=1$.

3.2. Estude a função f quanto à existência de assíntotas não verticais ao respetivo gráfico.

4. Considere a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=4\cos x+2\sin(2x)$.

4.1. Na figura está representada uma circunferência de centro no ponto O e raio 2.



Sabe-se que:

- os diâmetros $[DE]$ e $[CF]$ são perpendiculares;
- o ponto A se desloca sobre o arco EF;
- para cada posição do ponto A o ponto B é a sua imagem na reflexão de eixo FC;
- x é a amplitude, em radianos, do ângulo EOA $\left(x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\right)$.

a) Mostre que, para cada $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$, a área do triângulo $[ABC]$ é dada por $f(x)$.

b) Determine, caso exista, o valor de x para o qual a área do triângulo $[ABC]$ é máxima.

4.2. Se $\alpha = \arcsin\left(\sin\frac{5\pi}{6}\right)$, então $f(\alpha)$ é igual a:

(A) $\sqrt{3}$ **(B)** $-\sqrt{3}$ **(C)** $3\sqrt{3}$ **(D)** $-3\sqrt{3}$

5. Um ponto P desloca-se numa reta numérica durante um intervalo de tempo I, de tal forma que a respetiva abcissa é dada por $x(t) = 2\sin\left(\pi t - \frac{\pi}{3}\right)$.

5.1. Mostre que se trata de um oscilador harmónico.

5.2. A frequência (f) e o ângulo de fase (φ) deste oscilador são:

(A) $f = \frac{1}{2}$ e $\varphi = \frac{7\pi}{6}$ **(B)** $f = 2$ e $\varphi = \frac{7\pi}{6}$

(C) $f = \frac{1}{2}$ e $\varphi = \frac{5\pi}{6}$ **(D)** $f = 2$ e $\varphi = \frac{5\pi}{6}$

6. Seja (u_n) a sucessão definida por $u_n = \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{3n}$.

O valor de $\lim(u_n)$ é:

(A) $\frac{\sqrt{e}}{e}$ **(B)** $\frac{\sqrt{e}}{e^2}$ **(C)** $e\sqrt{e}$ **(D)** $\sqrt[3]{e^2}$

Fim da prova

COTAÇÕES (Caderno 2)

Item								
Cotação (em pontos)								
3.1.	**3.2.**	**4.1. a)**	**4.1. b)**	**4.2.**	**5.1.**	**5.2.**	**6.**	**Total**
15	15	15	20	10	15	10	10	110
TOTAL (Caderno 1 + Caderno 2)								**200**

Máximo Matemática A 12

Proposta de resolução

Caderno 1

1. $f(x)=x+\cos^4 x-\sin^4 x\;;\; D_f=[0\,,\pi]$

1.1. $f(x)=x+\cos^4 x-\sin^4 x=$

$=x+\left(\cos^2 x\right)^2-\left(\sin^2 x\right)^2=$

$=x+\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)\times\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)=$

$=x+\left(\cos x\cos x-\sin x\sin x\right)\times 1=$

$=x+\cos(x+x)=$

$=x+\cos(2x)$

1.2. $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f\left(\frac{\pi}{4}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{h}=$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\left(\frac{\pi}{4}+h\right)+\cos\left[2\left(\frac{\pi}{4}+h\right)\right]-\left[\frac{\pi}{4}+\cos\left(2\times\frac{\pi}{4}\right)\right]}{h}=$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\frac{\pi}{4}+h+\cos\left(\frac{\pi}{2}+2h\right)-\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{2}}{h}=$ $\quad\Big|\;\cos\left(\frac{\pi}{2}+2h\right)=-\sin(2h)$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h-\sin(2h)-0}{h}=$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h}{h}-\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin(2h)}{h}=$

$=1-2\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin(2h)}{2h}=$ $\quad\Big|\; x=2h$; Se $h\to 0\,,\, x\to 0.$

$=1-2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=$

$=1-2\times 1=-1$

1.3. A equação da bissetriz dos quadrantes ímpares é $y=x$ e o seu declive é igual a 1.

$f'(x)=\left[x+\cos(2x)\right]'=1-2\sin(2x)$

$f'(x)=1\wedge x\in[0\,,\pi]\Leftrightarrow 1-2\sin(2x)=1\wedge x\in[0\,,\pi]\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2\sin(2x)=0\wedge x\in[0\,,\pi]\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin(2x)=0\wedge x\in[0\,,\pi]\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x=k\pi\,,k\in\mathbb{Z}\wedge x\in[0\,,\pi]\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{k\pi}{2}\,,k\in\mathbb{Z}\wedge x\in[0\,,\pi]\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0\vee x=\dfrac{\pi}{2}\vee x=\pi$

Resposta: (C)

1.4. $f''(x)=\left[1-2\sin(2x)\right]'=0-2\times 2\cos(2x)=-4\cos(2x)$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow -4\cos(2x)=0 \wedge x\in[0\,,\pi] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos(2x)=0 \wedge x\in[0\,,\pi] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+k\pi\,,\,k\in\mathbb{Z} \wedge x\in[0\,,\pi] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\,,\,k\in\mathbb{Z} \wedge x\in[0\,,\pi] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4} \vee x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4} \vee x=\frac{3\pi}{4}$

x	0	0	$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
f''	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$
f		$\cap$		$\cup$		$\cap$	
			P.I.		P.I.		

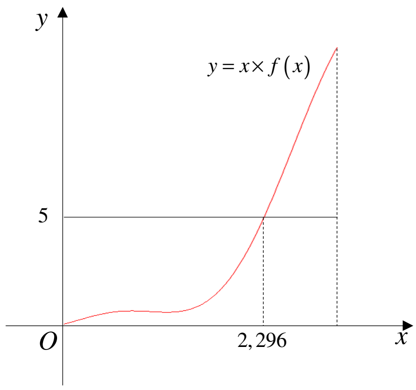
O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $\left[0\,,\frac{\pi}{4}\right[$ e em $\left]\frac{3\pi}{4}\,,\pi\right]$ e tem a concavidade voltada para cima em $\left]\frac{\pi}{4}\,,\frac{3\pi}{4}\right[$. Os pontos de abcissas $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{3\pi}{4}$ são pontos de inflexão.

1.5. A área do retângulo $[OABC]$ é igual a $\overline{OA}\times\overline{AB}$.

Designando por x a abcissa dos pontos A e B, tem-se $\overline{OA}=x$ e $\overline{AB}=f(x)$.

Vamos, assim, começar por determinar $x\in\left]0\,,\pi\right]$, tal que $x\times f(x)=1$.

Utilizando a calculadora gráfica, determinou-se a interseção da reta de equação $y=1$ com a curva de equação $y=x\times f(x) \Leftrightarrow y=x\left[x+\cos(2x)\right]$:

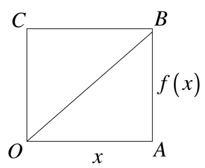


A abcissa do ponto A é, aproximadamente igual, a $2,296$.

$\overline{OA}=x\approx 2,296$

$\overline{AB}=f(x)\approx f(2,296)\approx 2,296+\cos(2\times 2,296)\approx 2,176$

$\overline{OB}=\sqrt{x^2+\left[f(x)\right]^2}\approx\sqrt{2,296^2+2,176^2}\approx 3,2$



Portanto, $\overline{OB}\approx 3,2$.

2. $C = C_0\left(1+\dfrac{r}{100n}\right)^n$

$C_0 = 10\,000$, $n = 12$ e $C = 10\,212$

$$10\,212 = 10\,000\left(1+\frac{r}{100\times 12}\right)^{12} \Leftrightarrow \left(1+\frac{r}{1200}\right)^{12} = \frac{10\,212}{10\,000} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1+\frac{r}{1200} = \left(\frac{10\,212}{10\,000}\right)^{\frac{1}{12}} \Leftrightarrow \frac{r}{1200} = \left(\frac{10\,212}{10\,000}\right)^{\frac{1}{12}} - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r = 1200\left(\frac{10\,212}{10\,000}\right)^{\frac{1}{12}} - 1200 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r \approx 2{,}10$$

Resposta: (C)

Caderno 2

3. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{k\sin(2-2x)}{x^2-x} & \text{se } 0 < x < 1 \\ \sqrt{x^2+3}+x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

3.1. f é contínua em $x=1$ se existir $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\frac{k\sin(2-2x)}{x^2-x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} k\lim_{x\to 1^-}\frac{\sin(2-2x)}{-x(1-x)} =$$

$$= k\lim_{x\to 1^-}\frac{2\sin(2-2x)}{-x(2-2x)} = -k\lim_{x\to 1^-}\frac{2}{x}\times\lim_{x\to 1^-}\frac{\sin(2-2x)}{2-2x} =$$

$y = 2-2x$
Se $x\to 1^-$, $y \to 0^+$.

$$= -k\times 2\times\lim_{y\to 0^+}\frac{\sin y}{y} = -2k\times 1 = -2k$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\left(\sqrt{x^2+3}+x\right) = \sqrt{1^2+3}+1 = 3 = f(1)$$

Para que exista $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ é necessário e suficiente que:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow -2k = 3 \Leftrightarrow k = -\frac{3}{2}$$

Portanto, se a função f é contínua em $x=1$, então $k = -\dfrac{3}{2}$.

3.2. Como $D_f = \mathbb{R}^+$, só poderá existir assíntota não vertical ao gráfico de f em $+\infty$.

Seja $y = mx+b$ a assíntota ao gráfico de f em $+\infty$, caso exista.

$$m = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+3}+x}{x} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}+x}{x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}+x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}+x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}+1\right)}{x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}+1\right) = \sqrt{1+0}+1 = 2$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-2x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+3}+x-2x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3}-x\right)\overset{(\infty-\infty)}{=}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+3}-x\right)\left(\sqrt{x^2+3}+x\right)}{\sqrt{x^2+3}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3-x^2}{\sqrt{x^2+3}+x}=$$

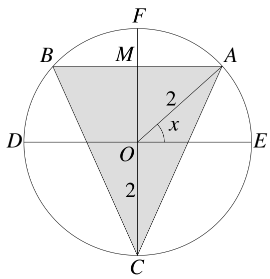
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{\sqrt{x^2+3}+x}=\frac{3}{+\infty}=0$$

A reta de equação $y=2x$ é uma assíntota ao gráfico de f em $+\infty$.

4. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ com $f(x)=4\cos x+2\sin(2x)$

4.1.

a) A área de $[ABC]$ é dada por:



$$\frac{\overline{AB}\times\overline{MC}}{2}=\frac{2\,\overline{AM}\times\left(2+\overline{OM}\right)}{2}=\overline{AM}\times\left(2+\overline{OM}\right)$$

$$\cos x=\frac{\overline{AM}}{2}\Leftrightarrow\overline{AM}=2\cos x$$

$$\sin x=\frac{\overline{OM}}{2}\Leftrightarrow\overline{OM}=2\sin x$$

$$A_{[ABC]}=\overline{AM}\times\left(2+\overline{OM}\right)=2\cos x\left(2+2\sin x\right)=$$

$$=4\cos x+2\times2\sin x\cos x=$$

$$=4\cos x+2\sin(2x)=f(x)$$

b) $f'(x)=\left[4\cos x+2\sin(2x)\right]'=-4\sin x+2\times2\cos(2x)=$

$$=4\cos(2x)-4\sin x$$

$$f'(x)=0\wedge x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\Leftrightarrow4\cos(2x)-4\sin x=0\wedge x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\cos(2x)-\sin x=0\wedge x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\cos^2x-\sin^2x-\sin x=0\wedge x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow1-\sin^2x-\sin^2x-\sin x=0\wedge x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow2\sin^2x+\sin x-1=0\wedge x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sin x=\frac{-1\pm\sqrt{1+4\times2}}{2\times2}\wedge x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sin x=\frac{-1\pm3}{4}\wedge x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\sin x=-1\vee\sin x=\frac{1}{2}\right)\wedge x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}$$

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
f'	$+$	$+$	0	$-$	
f	4	$\nearrow$		$\searrow$	
			Máx.		

A área do triângulo $[ABC]$ é máxima para $x=\frac{\pi}{6}$.

4.2. $\frac{5\pi}{6}\notin\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

$\sin\frac{5\pi}{6}=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}$

$\alpha=\arcsin\left(\sin\frac{5\pi}{6}\right)=\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{6}$ porque $\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

| $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to[-1,1]$
$x\to\sin x$
$[-1,1]\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$
$x\to\arcsin x$

$f(\alpha)=f\left(\frac{\pi}{6}\right)=4\cos\frac{\pi}{6}+2\sin\left(2\times\frac{\pi}{6}\right)=$

$=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}+2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}+\sqrt{3}=3\sqrt{3}$

Resposta: (C)

5.

5.1. $x(t)=2\sin\left(\pi t-\frac{\pi}{3}\right)=2\cos\left[\frac{\pi}{2}-\left(\pi t-\frac{\pi}{3}\right)\right]=$ | $\sin\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

$=2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\pi t+\frac{\pi}{3}\right)=$

$=2\cos\left(-\pi t+\frac{5\pi}{6}\right)=$ | $\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}=\frac{3\pi+2\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$

$=2\cos\left(\pi t-\frac{5\pi}{6}\right)=$ | $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$

$=2\cos\left(\pi t-\frac{5\pi}{6}+2\pi\right)=$

$=2\cos\left(\pi t+\frac{7\pi}{6}\right)$

$x(t)$ é da forma $A\cos(\omega t+\varphi)$ com $A>0$, $\omega>0$ e $\varphi\in[0,2\pi[$, logo é um oscilador harmónico.

5.2. Frequência: $f=\frac{\pi}{2\pi}=\frac{1}{2}$; fase: $\varphi=\frac{7\pi}{6}$

Resposta: (A)

6. $\lim(u_n)=\lim\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{3n}=\lim\left[\left(1-\frac{\frac{1}{2}}{n}\right)^n\right]^3=\left[\lim\left(1-\frac{\frac{1}{2}}{n}\right)^n\right]^3=$

$=\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)^3=e^{-\frac{3}{2}}=e^{\frac{1}{2}-2}=\frac{e^{\frac{1}{2}}}{e^2}=\frac{\sqrt{e}}{e^2}$

Resposta: (B)