Proposta de teste de avaliação

Matemática A

12.º ANO DE ESCOLARIDADE

Duração: 90 minutos **| Data:**

Caderno 1

(é permitido o uso de calculadora)

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identificam a opção escolhida.

1. A Sara recebeu de presente uma caixa contendo dez bolas de Natal, sendo seis azuis e quatro brancas.
As dez bolas distinguem-se apenas pela cor.

1.1. Se forem retiradas, simultaneamente e ao acaso, cinco bolas da caixa, qual é a probabilidade de saírem três bolas azuis e duas brancas?
Apresente o resultado na forma de percentagem, arredondado às unidades.

1.2. Admita que se extraem, ao acaso, sucessivamente e sem reposição, duas bolas da caixa.
Determine a probabilidade de as duas bolas extraídas serem azuis, sabendo que são da mesma cor.
Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

1.3. Considere, agora, que da caixa são retiradas n bolas azuis, ficando, portanto, com $6-n$ bolas azuis e quatro bolas brancas.

Realiza-se a seguinte experiência: extraem-se simultaneamente duas bolas da caixa, ao acaso.

Sabendo que a probabilidade de as duas bolas extraídas serem azuis é igual a $\frac{1}{7}$, determine o valor de n.

Para resolver este problema, percorra a seguintes etapas:

- equacione o problema;
- resolva a equação.

1.4. Suponha agora que as dez bolas inicialmente existentes na caixa são retiradas e colocadas numa fila, encostadas umas ao lado das outras.

Sabendo que bolas da mesma cor não se distinguem, quantas filas diferentes é possível formar em que haja pelo menos duas bolas brancas seguidas?

(A) $\dfrac{10!}{4!\times 6!}$ **(B)** $^{10}C_6 - {}^{7}C_4$

(C) $10! - 6!\times {}^{7}A_4$ **(D)** $^{10}C_4 - {}^{6}C_4$

2. Um dos termos do desenvolvimento de $\left(2+\dfrac{x^2}{2}\right)^{12}$ é um monómio da forma $k\,x^{10}$.

Determine o valor de k .

3. Relativamente a uma linha do Triângulo de Pascal sabe-se que o 6.º elemento é igual ao 15.º.

Qual é o maior valor dessa linha?

(A) 48 620 **(B)** 184 756

(C) 352 716 **(D)** 92 378

Fim do Caderno 1

COTAÇÕES (Caderno 1)

Item						
Cotação (em pontos)						
1.1.	**1.2.**	**1.3.**	**1.4.**	**2.**	**3.**	
15	20	15	10	15	10	**85**

Caderno 2

(não é permitido o uso de calculadora)

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identificam a opção escolhida.

4. Uma turma do 12.º ano com 30 alunos tem igual número de rapazes e raparigas.
Nessa turma, 18 alunos têm a disciplina de Física e os restantes têm, em alternativa, a disciplina de Psicologia. Nove dos alunos que têm Psicologia são raparigas.

Escolhe-se ao acaso um aluno dessa turma.

Qual é a probabilidade de:

4.1. o aluno escolhido ser uma rapariga que frequenta a disciplina de Física?

(A) $\frac{1}{2}$ **(B)** $\frac{1}{3}$ **(C)** $\frac{1}{5}$ **(D)** $\frac{2}{5}$

4.2. o aluno escolhido ser rapaz, sabendo que não tem a disciplina de Psicologia?

(A) $\frac{2}{3}$ **(B)** $\frac{1}{3}$ **(C)** $\frac{2}{5}$ **(D)** $\frac{4}{5}$

5. Escolhe-se, ao acaso, um aluno de uma turma do 12.º ano.
Relativamente a esta experiência aleatória, considere os acontecimentos:

A: "O aluno é um rapaz"

B: "O aluno usa óculos"

Sabe-se que $P\left(\overline{A} \cap B\right) = \frac{1}{6}$.

Qual das afirmações seguintes é necessariamente verdadeira?

(A) $P\left(A \cup B\right) = P\left(A\right) + P\left(B\right)$

(B) $P\left(\overline{A} \cup B\right) < P\left(\overline{A}\right) + P\left(B\right)$

(C) $P\left(A \cup \overline{B}\right) = \frac{2}{3}$

(D) $P\left(A\right) > \frac{5}{6}$

6. Seja E um conjunto finito, P uma probabilidade em $\mathcal{P}(E)$ e sejam A e B dois acontecimentos possíveis $(A, B \in \mathcal{P}(E))$.

6.1. Mostre que $P(A \cup B) - P(A) \times P(\overline{B} \mid A) = P(B)$.

6.2. Sabe-se que:

- $P(A \mid B) = \frac{1}{3}$
- $P(B \mid A) = \frac{1}{4}$
- $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{2}{5}$

Determine o valor de $P(B)$.

7. Considere a função g definida em $\mathbb{R}$ por $g(x) = x^5 + x - 1$.

7.1. Mostre que a função g é estritamente crescente.

7.2. Sabendo que g é a segunda derivada de uma determinada função f, mostre que o gráfico da função f tem um e um só ponto de inflexão e que a sua abcissa pertence ao intervalo $]0, 1[$.

7.3. Sabe-se que uma função h é tal que $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \geq h(x)$.

O valor de $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1 - g(x) \times h(x)}{g(x)}$ é:

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** $-\infty$ **(D)** $+\infty$

8. Utilize o teorema das sucessões enquadradas para calcular o limite da sucessão $u_n = \left(\frac{n+4}{3n+3}\right)^n$.

Fim da prova

COTAÇÕES (Caderno 2)

Item									
Cotação (em pontos)									
4.1	**4.2.**	**5.**	**6.1.**	**6.2.**	**7.1.**	**7.2.**	**7.3.**	**8.**	
10	10	10	15	15	15	15	10	15	**115**
TOTAL (Caderno1 + Caderno2)									**200**

Proposta de resolução

Caderno 1

1.

1.1.

Azuis	Brancas	Total
6	4	10
3	2	5

Número de casos possíveis: ${}^{10}C_5 = 252$

Número de casos favoráveis: ${}^{6}C_3 \times {}^{4}C_2 = 20 \times 6 = 120$

Probabilidade pedida: $\dfrac{120}{252} \approx 48\%$

1.2. Sejam os acontecimentos:

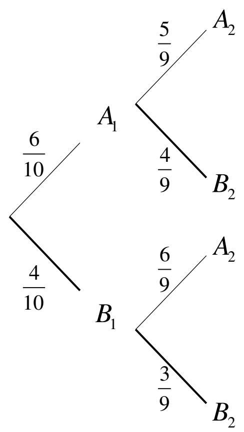
A_1 : "A primeira bola extraída é azul" B_1 : "A primeira bola extraída é branca"

A_2 : "A segunda bola extraída é azul" B_2 : "A segunda bola extraída é branca"

A : "As duas bolas extraídas são azuis"

C : "As duas bolas extraídas são da mesma cor"

Pretende-se determinar $P(A \mid C)$.



$$P(A \mid C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1 \cap A_2) + P(B_1 \cap B_2)} =$$

$$= \frac{P(A_1) \times P(A_2 \mid A_1)}{P(A_1) \times P(A_2 \mid A_1) + P(B_1) \times P(B_2 \mid B_1)} =$$

$$= \frac{\frac{6}{10} \times \frac{5}{9}}{\frac{6}{10} \times \frac{5}{9} + \frac{4}{10} \times \frac{3}{9}} = \frac{\frac{30}{90}}{\frac{30}{90} + \frac{12}{90}} = \frac{\frac{30}{90}}{\frac{42}{90}} = \frac{30}{42} = \frac{5}{7}$$

1.3. Número total de bolas: $10 - n$; número de bolas azuis: $6 - n$

Número de casos possíveis: ${}^{10-n}C_2$ (número de maneiras de escolher 2 bolas entre as $10 - n$ existentes na caixa)

Número de casos favoráveis: ${}^{6-n}C_2$ (número de maneiras de escolher 2 bolas azuis entre as $6 - n$ existentes na caixa)

A probabilidade de as duas bolas serem azuis é igual a $\dfrac{{}^{6-n}C_2}{{}^{10-n}C_2}$.

$$\frac{{}^{6-n}C_2}{{}^{10-n}C_2} = \frac{1}{7} \Leftrightarrow \frac{\frac{{}^{6-n}A_2}{2!}}{\frac{{}^{10-n}A_2}{2!}} = \frac{1}{7} \Leftrightarrow \frac{\frac{(6-n)(5-n)}{2!}}{\frac{(10-n)(9-n)}{2!}} = \frac{1}{7} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(6-n)(5-n)}{(10-n)(9-n)} = \frac{1}{7} \Leftrightarrow \frac{30 - 6n - 5n + n^2}{90 - 10n - 9n + n^2} = \frac{1}{7} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 7\left(30 - 11n + n^2\right) = 90 - 19n + n^2 \Leftrightarrow 210 - 77n + 7n^2 - 90 + 19n - n^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6n^2 - 58n + 120 = 0 \Leftrightarrow 3n^2 - 29n + 60 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{29 \pm \sqrt{29^2 - 4 \times 3 \times 60}}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{29 \pm \sqrt{121}}{6} \Leftrightarrow n = \frac{29 \pm 11}{6} \Leftrightarrow n = 3 \vee n = \frac{20}{3}$$

Como n é um número inteiro e $0 \le n \le 4$, vem $n = 3$.

1.4. Número de filas que é possível formar:

${}^{10}C_6$: número de maneiras de, entre os dez lugares da fila, escolher seis para as bolas azuis

Os restantes quatro lugares serão ocupados pelas bolas brancas (ou ${}^{10}C_4$, que é o número de maneiras de, entre os dez lugares da fila, escolher quatro para as bolas brancas).

Número de filas que é possível formar em que não apareçam duas bolas brancas seguidas:

${}^{7}C_4$: número de maneiras de, entre os sete lugares determinados pelas bolas azuis $\left(\underset{1}{-}A\underset{2}{-}A\underset{3}{-}A\underset{4}{-}A\underset{5}{-}A\underset{6}{-}A\underset{7}{-}\right)$, escolher quatro para as bolas brancas.

Portanto, o número de filas diferentes que é possível formar em que haja pelo menos duas bolas brancas seguidas é dado por: ${}^{10}C_6 - {}^{7}C_4$

Resposta: (B)

2. $$\left(2+\frac{x^2}{2}\right)^{12} = \sum_{p=0}^{12} {}^{12}C_p \times 2^{12-p}\left(\frac{x^2}{2}\right)^p$$

$$T_{p+1} = {}^{12}C_p \times 2^{12-p}\left(\frac{x^2}{2}\right)^p = {}^{12}C_p \times 2^{12-p} \times \frac{x^{2p}}{2^p} = {}^{12}C_p \times \frac{2^{12-p}}{2^p} x^{2p} = {}^{12}C_p \times 2^{12-p-p} x^{2p} = {}^{12}C_p \times 2^{12-2p} x^{2p}$$

$2p = 10 \Leftrightarrow p = 5$

$T_{5+1} = {}^{12}C_5 \times 2^{12-2\times5} x^{2\times5} = 792 \times 2^2 x^{10} = 792 \times 4x^{22} = 3168x^{22}$

Logo, $k = 3168$

3. A linha de ordem n é formada por elementos da forma ${}^{n}C_p$, com $0 \le p \le n$.

Sabe-se que o 6.º elemento $\left({}^{n}C_5\right)$ é igual ao 15.º $\left({}^{n}C_{14}\right)$, ou seja:

${}^{n}C_5 = {}^{n}C_{14} \Leftrightarrow n-5=14 \Leftrightarrow n=19$

A linha de ordem 19 tem 20 elementos. Como n é ímpar (e o número de elementos é par), o maior valor é o dos dois elementos centrais: ${}^{19}C_9 = {}^{19}C_{10} = 92\,378$.

Resposta: (D)

Caderno 2

4. Na tabela seguinte resumem-se os dados do problema.

	Física	Psicologia	
Rapazes	12	3	**15**
Raparigas (M)	6	9	**15**
	18	**12**	**30**

$30:2=15$
$30-18=12$
$12-9=3$
$15-3=12$
$18-12=6$

4.1. Em 30 alunos há 6 raparigas que frequentam a disciplina de Física.

A probabilidade pedida é $\frac{6}{30}=\frac{1}{5}$.

Resposta: (C)

4.2. Há 18 alunos que não têm a disciplina de Psicologia, 12 dos quais são rapazes.

Portanto, a probabilidade de o aluno escolhido ser rapaz, sabendo que não tem a disciplina de Psicologia, é igual a $\frac{12}{18}=\frac{2}{3}$.

Resposta: (A)

5.

- $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$ apenas se $P(A\cap B)=0$, o que não se pode garantir (não é dado que nenhum rapaz usa óculos). Logo, esta afirmação pode ser verdadeira ou falsa.
- $P(\overline{A}\cup B)=P(\overline{A})+P(B)-P(\overline{A}\cap B)$

  Como $P(\overline{A}\cap B)=\frac{1}{6}>0$, vem $P(\overline{A}\cup B)<P(\overline{A})+P(B)$.

  Logo, a afirmação é verdadeira.
- $P(\overline{A}\cap B)=\frac{1}{6}\Leftrightarrow P(\overline{\overline{A}\cap B})=1-\frac{1}{6}\Leftrightarrow P(A\cup \overline{B})=\frac{5}{6}$

  Portanto, $P(A\cup\overline{B})\neq\frac{2}{3}$, pelo que a afirmação é falsa.
- $P(\overline{A}\cap B)\leq P(\overline{A})\Leftrightarrow \frac{1}{6}\leq 1-P(A)\Leftrightarrow P(A)\leq 1-\frac{1}{6}\Leftrightarrow P(A)\leq\frac{5}{6}$

  Logo, a afirmação $P(A)>\frac{5}{6}$ é falsa.

Resposta: (B)

6.1. $P(A\cup B)-P(A)\times P(\overline{B}\mid A)=$

$=P(A)+P(B)-P(A\cap B)-P(A\cap\overline{B})=$

$=P(B)+[P(A)-P(A\cap B)]-P(A\cap\overline{B})=$

$=P(B)+P(A\cap\overline{B})-P(A\cap\overline{B})=$

$=P(B)$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$
$P(A)\times P(\overline{B}\mid A)=P(A\cap\overline{B})$

$P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap\overline{B})\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow P(A)-P(A\cap B)=P(A\cap\overline{B})$

6.2. $P(A\mid B)=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow P(A\cap B)=\frac{1}{3}P(B)$ (1)

$P(B\mid A)=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow P(A)=4P(B\cap A)\Leftrightarrow P(A)=4P(A\cap B)$ (2)

$P(\overline{A}\cap\overline{B})=\frac{2}{5}\Leftrightarrow P(\overline{A\cup B})=\frac{2}{5}\Leftrightarrow P(A\cup B)=1-\frac{2}{5}\Leftrightarrow P(A\cup B)=\frac{3}{5}$ (3)

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$\frac{3}{5}=4P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B)\Leftrightarrow\frac{3}{5}=3P(A\cap B)+P(B)\Leftrightarrow$ (3) e (2)

$\Leftrightarrow\frac{3}{5}=3\times\frac{1}{3}P(B)+P(B)\Leftrightarrow$ (1)

$\Leftrightarrow\frac{3}{5}=2P(B)\Leftrightarrow P(B)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(B)=\frac{3}{10}$

7.1. $g(x)=x^5+x-1$; $D_g=\mathbb{R}$

$g'(x)=5x^4+1$

Como $g'(x)>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, podemos concluir que a função g é estritamente crescente.

7.2. A função g é contínua $\mathbb{R}$ por ser uma função polinomial. Logo, g é contínua em $[0, 1]$.

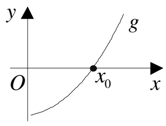
$g(0) = 0^5 + 0 - 1 = -1$; $g(1) = 1^5 + 1 - 1 = 1$

Assim, $g(0) \times g(1) < 0$.

Como g é contínua em $[0, 1]$ e $g(0) \times g(1) < 0$, pelo corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy podemos concluir que existe pelo menos um $x \in]0, 1[$ tal que $g(x) = 0$.

Atendendo a que a função g é estritamente crescente em $\mathbb{R}$, então é injetiva, pelo que o zero cuja existência se provou é único.

Seja $x_0 \in]0, 1[$ o zero de g.



Sendo a função g estritamente crescente, vem que $g(x) < 0$, qualquer que seja $x \in]-\infty, x_0[$ e $g(x) > 0$, qualquer que seja $x \in]x_0, +\infty[$.

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f'' = g$	$-$	0	$+$
f	$\cap$		$\cup$

P.I.

Portanto, como a função g é a segunda derivada da função f, podemos concluir que o ponto do gráfico de f cuja abcissa é $x_0 \in]0, 1[$ é o seu único ponto de inflexão.

7.3. $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x^5 + x - 1) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x^5) = (-\infty)^5 = -\infty$

Se $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ e $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \geq h(x)$, então $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = -\infty$ (teorema de comparação de funções)

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1 - g(x) \times h(x)}{g(x)} = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{g(x)} - \frac{g(x) \times h(x)}{g(x)} \right) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{g(x)} - h(x) \right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{g(x)} - \lim_{x\to-\infty} h(x) = \frac{1}{-\infty} - (-\infty) = 0 + \infty = +\infty$$

Resposta: (D)

8. $\frac{n+4}{3n+3} = \frac{1}{3} + \frac{3}{3n+3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{n+1}$

$$\begin{array}{r|l} n+4 & 3n+3 \\ \hline -n-1 & \frac{1}{3} \\ \hline 3 & \end{array}$$

$\frac{1}{n+1}$ é o termo geral de uma sucessão estritamente decrescente de termos positivos.

Assim, para qualquer $n \in \mathbb{N}$:

$$0 < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{1+1} \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{3} < \frac{1}{3} + \frac{1}{n+1} < \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{3} < \frac{n+4}{3n+3} < \frac{3+2}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} < \frac{n+4}{3n+3} < \frac{5}{6} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^n < \left(\frac{n+4}{3n+3}\right)^n < \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

Como $\lim \left(\frac{1}{3}\right)^n = \lim \left(\frac{5}{6}\right)^n = 0$ e, para todo o $n \in \mathbb{N}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^n < u_n < \left(\frac{5}{6}\right)^n$, podemos concluir, pelo teorema das sucessões enquadradas, que $\lim u_n = 0$.