Máximo Matemática A 12

Proposta de teste de avaliação

Matemática A

12.º ANO DE ESCOLARIDADE

Duração: (Caderno 1 + Caderno 2): 150 minutos. Tolerância: 30 minutos **Data:** MAIO 2019

Porto Editora

Caderno 1: 75 minutos. Tolerância:15 minutos

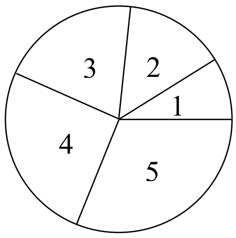
(é permitido o uso de calculadora)

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato

---

1. Na figura, está representado um círculo dividido em cinco setores circulares diferentes, numerados de 1 a 5.



Estão disponíveis seis cores para pintar este círculo, admitindo as condições seguintes:

- cada setor é pintado de uma única cor e todos serão pintados;
- setores com um raio comum não podem ser pintados da mesma cor;
- o círculo ficará pintado com quatro cores

De quantas maneiras diferentes pode o círculo ficar pintado?

(A) 1800 **(B)** 900 **(C)** 360 **(D)** 120

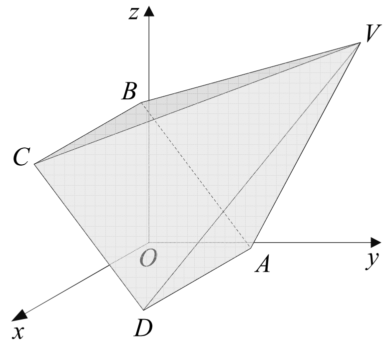
2. O refeitório de uma empresa serve apenas almoços e jantares. Os trabalhadores da empresa podem aí tomar uma das refeições ou as duas.

No dia 31 de maio verificou-se que:

- metade dos trabalhadores que usaram a cantina, almoçaram e jantaram;
- o número de trabalhadores que almoçaram na cantina é igual ao número de trabalhadores que aí jantaram.

Escolhe-se, ao acaso, um trabalhador dessa empresa. Sabendo que esse trabalhador almoçou na cantina no dia 31 de maio, determine a probabilidade de aí também ter jantado nesse dia.

3. Na figura, está representada, num referencial o. n. $Oxyz$, a pirâmide quadrangular regular $[ABCDV]$.



Sabe-se que:

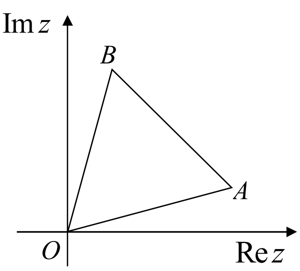
- o plano ABC pode ser definido pela equação $4y+3z-24=0$;
- para determinados valores de a e b, os pontos A e B têm coordenadas $(1, a, 0)$ e $(1, 0, b)$, respetivamente;
- o ponto C tem coordenadas $(11, 0, 8)$;
- a pirâmide $[ABCDV]$ tem volume igual a 500.

3.1. Mostre que $a=6$ e $b=8$ e determine um valor aproximado à décima do grau da amplitude do ângulo OAB.

3.2. Determine as coordenadas do ponto V sabendo que são todas positivas.

4. Na figura, está representado, no plano complexo, o triângulo equilátero $[OAB]$ (O é a origem do referencial).

Sabe-se que os pontos A e B são os afixos de duas das raízes de índice n de um número complexo z.



Qual dos seguintes pode ser o valor de n?

(A) 9 **(B)** 15

(C) 18 **(D)** 21

5. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = x + e^{x^2 - 2x}$.

5.1. Mostre que existe pelo menos um ponto do gráfico de f , cuja abcissa pertence ao intervalo $]0, 2[$, em que a reta tangente ao gráfico nesse ponto tem declive igual a 2.

5.2. Seja r a reta cuja existência foi provada na alínea anterior. Admita que existe uma única reta nas condições aí enunciadas.

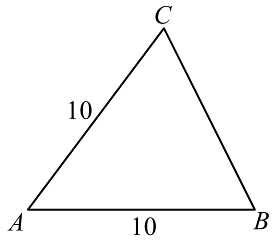
Seja b o ponto de interseção da reta r com o eixo Oy .

Determine o valor de b recorrendo às capacidades gráficas da calculadora.

Na sua resposta:

- apresente a(s) equação(ões) que lhe permite(m) obter a solução do problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permitem resolver a(s) equação(ões);
- apresente o valor de b arredondado às décimas (se em cálculos intermédios proceder a arredondamentos, mantenha três casas decimas, pelo menos).

6. Na figura, está representado um triângulo $[ABC]$ de área igual a 40.



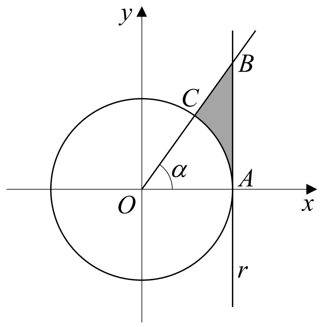
Sabe-se ainda que $\overline{AB} = \overline{AC} = 10$.

O valor do produto escalar $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ é:

(A) 50 **(B)** $50\sqrt{3}$

(C) 60 **(D)** 40

7. Na figura, estão representadas, num referencial o. n. xOy, a circunferência de equação $x^2+y^2=1$ bem como a reta r, tangente à circunferência no ponto A de coordenadas $(1,0)$.



Sabe-se ainda que:

- o ponto C pertence à circunferência;
- o ponto B é o ponto de intersecção da reta r com a semirreta $\dot{O}C$;
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo AOC, com $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Qual das expressões seguintes representa, em função de a, a área da região a sombreada?

(A) $\frac{\alpha}{2}$

(B) $\frac{1}{2}\tan\alpha$

(C) $\frac{1}{2}(\sin\alpha-\alpha)$

(D) $\frac{1}{2}(\tan\alpha-\alpha)$

8. Seja S o espaço amostral (espaço de resultados) associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset S$ e $B \subset S$), com $P(A)>0$.

Mostre que $P\left(\overline{A \cap B} \mid A\right) = P\left(\overline{B} \mid A\right)$.

Fim do Caderno 1

COTAÇÕES (Caderno 1)

Item										
Cotação (em pontos)										
1.	**2.**	**3.1.**	**3.2.**	**4.**	**5.**	**5.2.**	**6.**	**7.**	**8.**	
8	11	11	12	8	11	12	8	8	11	**100**

Caderno 2: 75 minutos. Tolerância:15 minutos

(não é permitido o uso de calculadora)

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identificam a opção escolhida.

9. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z = \dfrac{8+4\text{i}^3}{(\text{i}-2)^2 - 2 + 3\text{i}^{14}}$

Determine e apresente na forma algébrica as raízes cúbicas do número complexo $4z$.

10 Considere a sucessão (u_n) definida, para determinado número real k, por $u_n = \left(\dfrac{n+2k}{n+1}\right)^{2n}$.

Sabe-se que $\lim u_n = \sqrt{\text{e}}$. O valor de k é:

(A) $\frac{3}{4}$ **(B)** $\frac{5}{8}$ **(C)** $\frac{1}{2}$ **(D)** $\frac{1}{4}$

11 De uma progressão geométrica (a_n) sabe-se que, para determinado número real x positivo e diferente de 1,

$$x^2 \ , \ x \ \text{ e } \ \log x$$

são os três primeiros termos (por esta ordem).

Mostre que 10^{-10} é um termo da sucessão (a_n).

12. Seja f a função de domínio $\mathbb{R}^+$ definida por $f(x) = x^2(2\ln x - 3)$.

12.1. Estude a função f quanto à existência de assíntotas verticais do seu gráfico.

12.2. Estude a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos.

12.3. Seja α a inclinação, em radianos, da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1.

Qual das seguintes igualdades é verdadeira?

(A) $\tan\alpha = 4$ **(B)** $\cos^2\alpha = \frac{1}{17}$

(C) $\sin^2\alpha = \frac{1}{17}$ **(D)** $\cos\alpha = \frac{\sqrt{17}}{17}$

13. De uma função f de domínio $]-\pi, \pi[$, sabe-se que $f(0)=1$ e que a sua **derivada** f', igualmente definida no intervalo $]-\pi, \pi[$, é dada por $f'(x)=\dfrac{\cos x}{1+\cos x}$.

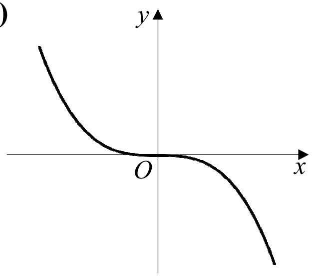
13.1. Justifique que se $a \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ então $f(a)>1$.

13.2. Estude a função f quanto às concavidades do seu gráfico e determine as abcissas dos pontos de inflexão, caso existam.

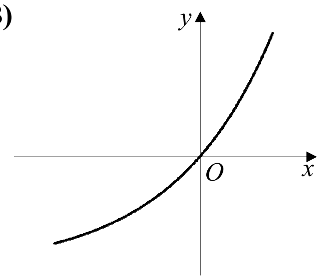
14 De uma função f, duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$, sabe-se que o seu gráfico tem um ponto de inflexão de abcissa nula.

Em qual das figuras seguintes pode estar uma representação gráfica da função f', **primeira derivada** da função f ?

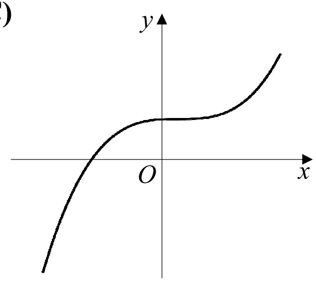
(A)



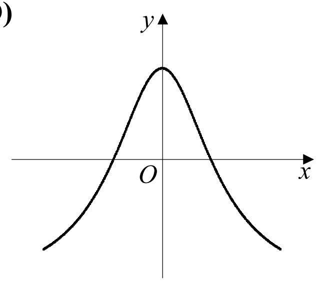
(B)



(C)



(D)



15. Sabendo que $\alpha=\arcsin\left(\sin\dfrac{5\pi}{6}\right)$, o valor de $\cos\alpha+\sin(2\alpha)$ é:

(A) 0 **(B)** $-\sqrt{3}$ **(C)** $\sqrt{3}$ **(D)** $2\sqrt{3}$

Fim da prova

COTAÇÕES (Caderno 2)

Item										
Cotação (em pontos)										
9.	**10.**	**11.**	**12.1.**	**12.2.**	**12.3.**	**13.1.**	**13.2.**	**14.**	**15.**	
11	8	11	11	12	8	11	12	8	8	**100**
TOTAL (Caderno 1 + Caderno 2)										**200**

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α - amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r - raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Área de um setor circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α - amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r - raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r - raio da base; g - geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$

Trigonometria

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis}\theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$ ou $(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis}\theta} = \sqrt[n]{\rho}\operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ *ou* $\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$

$(k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1(x_1-\mu)^2 + \ldots + p_n(x_n-\mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u'$, $(n \in \mathbb{R})$

$(\sin u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' e^u$

$(a^u)' = u' a^u \ln a$, $(a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$, $(a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, $(n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

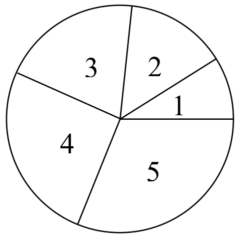
$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$ $(p \in \mathbb{R})$

Proposta de resolução

Caderno 1

1.

- Há ${}^{6}C_4 = 15$ maneiras de escolher as quatro cores a utilizar, entre as seis cores disponíveis.
- Como são usadas quatro cores para pintar os cinco setores, há uma (e uma só) cor que tem de se repetir. Entre as cores selecionadas, há 4 maneiras de escolher a cor que se repete.



- Os dois setores que vão ficar da mesma cor podem ser escolhidos de 5 maneiras diferentes (as escolhas possíveis são: 1,3 - 1,4 - 2,4 - 2,5 - 3,5).

  Ou ${}^{5}C_2 - 5 = 10 - 5 = 5$ (todas as maneiras de escolher dois setores menos os casos que não servem: 1,2 - 2,3 - 3,4 - 4,5 - 5,1)
- Os restantes três setores podem ser pintados pelas restantes três cores de $3! = 6$ maneiras diferentes.

Há, portanto, $15 \times 4 \times 5 \times 6 = 1800$ possibilidades.

Resposta: **(A)**

2. Na escolha ao acaso de um trabalhador da empresa, sejam os acontecimentos:

A: "O trabalhador escolhido almoçou na cantina no dia 31 de maio"

B: "O trabalhador escolhido jantou na cantina no dia 31 de maio"

É dado que:

- $P(A \cap B) = \frac{1}{2} P(A \cup B) \Leftrightarrow P(A \cup B) = 2P(A \cap B)$
- $P(A) = P(B)$

Pretende-se determinar $P(B \mid A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2P(A \cap B) = P(A) + P(A) - P(A \cap B) \Leftrightarrow \qquad \left| \begin{array}{l} P(A \cup B) = 2P(A \cap B) \\ P(A) = P(B) \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow 2P(A \cap B) + P(A \cap B) = 2P(A) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3P(A \cap B) = 2P(A) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\frac{P(A \cap B)}{P(A)} = 2 \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{2}{3} \qquad \left| \; P(A) \neq 0 \right.$$

Logo, a probabilidade pedida é igual a $\frac{2}{3}$.

3. $ABC: \ 4y+3z-24=0$

3.1. $A(1, a, 0)$ e $B(1, 0, b)$

Dado que A e B são pontos do plano ABC, vem:

$4a+3\times 0-24=0 \Leftrightarrow 4a=24 \Leftrightarrow a=6$

$4\times 0+3b-24=0 \Leftrightarrow 3b=24 \Leftrightarrow b=8$

$A(1, 6, 0)$ e $B(1, 0, 8)$

$\overrightarrow{AO}=O-A=(0,0,0)-(1,6,0)=(-1,-6,0)$

$\overrightarrow{AB}=B-A=(1,0,8)-(1,6,0)=(0,-6,8)$

$\|\overrightarrow{AO}\|=\sqrt{(-1)^2+(-6)^2+0}=\sqrt{1+36}=\sqrt{37}$

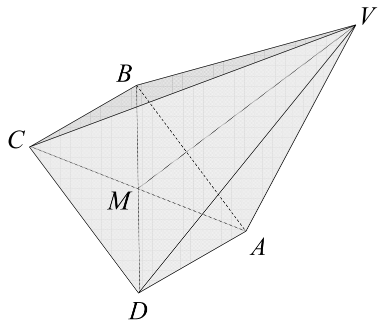
$\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{0^2+(-6)^2+8^2}=\sqrt{36+64}=\sqrt{100}=10$

$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=(-1,-6,0)\cdot(0,-6,8)=0+36+0=36$

$$\cos\left(O\hat{A}B\right)=\cos\left(\overrightarrow{AO}\,\hat{,}\,\overrightarrow{AB}\right)=\frac{\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AO}\|\times\|\overrightarrow{AB}\|}=\frac{36}{10\sqrt{37}}=\frac{18}{5\sqrt{37}}$$

Se $\cos\left(O\hat{A}B\right)=\dfrac{18}{5\sqrt{37}}$, então $O\hat{A}B\approx 53{,}7^{\circ}$.

3.2. $C(11,0,8)$ e $A(1,6,0)$



O centro da base da pirâmide é M, ponto médio de $[AC]$.

O ponto M tem coordenadas $\left(\dfrac{11+1}{2},\dfrac{0+6}{2},\dfrac{8+0}{2}\right)=(6,3,4)$.

O vetor de coordenadas $(0,4,3)$ é perpendicular ao plano $ABC: \ 4y+3z-24=0$

O vetor $\overrightarrow{MV}$ é perpendicular ao plano ABC, ou seja, $\overrightarrow{MV}$ é colinear com o vetor $(0,4,3)$.

$\overrightarrow{MV}=k(0,4,3)=(0,4k,3k), k\in\mathbb{R}$

A altura da pirâmide é igual a $\|\overrightarrow{MV}\|$.

$V_{\text{pirâmide}}=500 \Leftrightarrow \dfrac{1}{3}\times A_{\text{base}}\times \text{altura}=500 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{3}\times\|\overrightarrow{AB}\|^2\times\|\overrightarrow{MV}\|=500 \Leftrightarrow \qquad | \ \|\overrightarrow{AB}\|=10$

$\Leftrightarrow 10^2\times\|\overrightarrow{MV}\|=1500 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 100\times\|\overrightarrow{MV}\|=1500 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \|\overrightarrow{MV}\|=15$

$$\left\|\overrightarrow{MV}\right\| = 15 \Leftrightarrow \left\|(0,\ 4k,\ 3k)\right\| = 15 \Leftrightarrow \sqrt{0^2 + (4k)^2 + (3k)^2} = 15 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{16k^2 + 9k^2} = 15 \Leftrightarrow \sqrt{25k^2} = 15 \Leftrightarrow |5k| = 15 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5k = 15 \vee 5k = -15 \Leftrightarrow k = 3 \vee k = -3$$

Se $k = 3$,

$$\overrightarrow{MV} = (0,\ 4\times 3,\ 3\times 3) = (0,\ 12,\ 9)$$

$$V = M + \overrightarrow{MV} = (6,\ 3,\ 4) + (0,\ 12,\ 9) = (6, 15, 13)$$

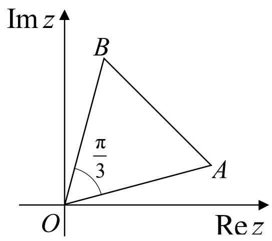
Se $k = -3$,

$$\overrightarrow{MV} = (0,\ -4\times 3,\ -3\times 3) = (0,\ -12, -9)$$

$$V = M + \overrightarrow{MV} = (6,\ 3,\ 4) + (0,\ -12,\ -9) = (6, -9, -5)$$

Dado que V tem as coordenadas positivas, temos $V(6, 15, 13)$.

4. Se o triângulo $[OAB]$ é equilátero, então $A\hat{O}B = \frac{\pi}{3}$.



Se A é o afixo do número complexo $u = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ então B é o afixo do número complexo $v = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)}$.

Sabemos que u e v são duas das raízes de índice n de um número complexo z. Então, $v^n = u^n$.

$$v^n = u^n \Leftrightarrow \left(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)}\right)^n = \left(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n \Leftrightarrow r^n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)} = r^n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = n\theta + 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n\theta + \frac{n\pi}{3} = n\theta + 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{n\pi}{3} = 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{n}{3} = 2k\ ,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n = 6k\ ,\ k \in \mathbb{Z}$$

Portanto, n é um número natural múltiplo de 6.

Resposta: **(C)**

5. $f(x) = x + \mathrm{e}^{x^2 - 2x}$

5.1. $f'(x) = x' + \left(\mathrm{e}^{x^2-2x}\right)' = 1 + \left(x^2 - 2x\right)'\mathrm{e}^{x^2-2x} =$

$$= 1 + (2x - 2)\mathrm{e}^{x^2-2x}$$

A função f' é contínua em $\mathbb{R}$ (composta, soma e produto de funções contínuas em $\mathbb{R}$).

Logo, a função f' é contínua em $[0\,,2]$.

$f'(0)=1+(2\times 0-2)e^{0^2-2\times 0}=1-2\times 1=-1<2$

$f'(2)=1+(2\times 2-2)e^{2^2-2\times 2}=1+2\times 1=3>2$

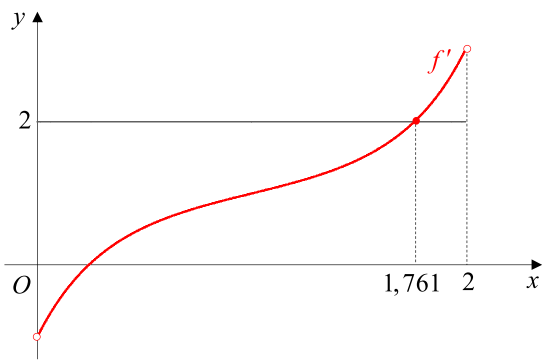
Como a função f' é contínua em $[0\,,2]$ e $f'(0)<2<f'(2)$ podemos concluir, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, que existe pelo menos um $x_0 \in]0\,,2[$ tal que $f'(x)_0=2$.

Fica, portanto, provado que existe pelo menos um ponto do gráfico de f, cuja abcissa pertence ao intervalo $]0\,,2[$, em que a reta tangente ao gráfico nesse ponto tem declive igual a 2.

5.2. Em primeiro lugar, determinamos a abcissa do ponto de tangência que é a solução da equação $f'(x)=2$ (de acordo com os dados, a solução é única).

Recorrendo à calculadora gráfica, determinou-se a abcissa do ponto de interseção dos gráficos de $y_1=f'(x)=1+(2x-2)e^{x^2-2x}$ e $y_2=2$, com $0<x<2$.

Obteve-se o resultado ao lado.



A abcissa do ponto de tangência é $x_0 \approx 1,761$.

A ordenada do ponto de tangência é:

$f(x_0)\approx 1,761+e^{1,761^2-2\times 1,761}\approx 2,417$

O ponto de tangência, P_0, tem coordenadas aproximadamente iguais a $(1,761\,;2,417)$.

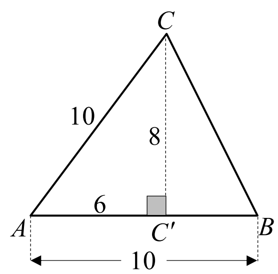
Seja $y=mx+b$ a equação da reta r.

Sabemos que $m=2$ e que o ponto de tangência, P_0, também pertence à reta r.

Assim, $2,417\approx 2\times 1,761+b$ pelo que $b\approx 2,417-2\times 1,761\approx -1,1$.

Logo, $b\approx -1,1$.

6. Seja C' a projeção ortogonal do ponto C na reta AB.



Como a área do triângulo $[ABC]$ é igual a 40, vem:

$\frac{\overline{AB}\times\overline{CC'}}{2}=40 \Leftrightarrow 10\times\overline{CC'}=80 \Leftrightarrow \overline{CC'}=8$

O triângulo $[AC'C]$ é retângulo em C'. Logo

$\overline{AC'}^2+\overline{CC'}^2=\overline{AC}^2$

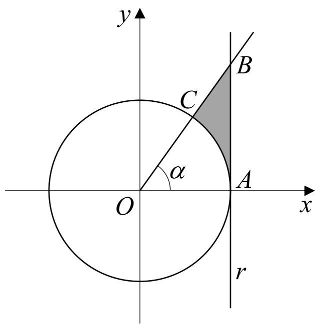
$\overline{AC'}^2+8^2=10^2 \Leftrightarrow \overline{AC'}^2=100-64 \Leftrightarrow \overline{AC'}^2=36 \Leftrightarrow \overline{AC'}=6$

Pela definição de produto escalar,

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overline{AB}\times\overline{AC'}=10\times 6=60$

Resposta: **(C)**

7. Área do setor circular $AOC = \dfrac{\alpha r^2}{2} = \dfrac{\alpha \times 1^2}{2} = \dfrac{\alpha}{2}$ $\quad | \; r = 1$



Área do triângulo $[OAB] = \dfrac{\overline{OA} \times \overline{AB}}{2}$

Como $\overline{OA} = 1$ e $\overline{AB} = \tan\alpha$, vem

$$A_{[OAB]} = \frac{\overline{OA} \times \overline{AB}}{2} = \frac{1 \times \tan\alpha}{2} = \frac{\tan\alpha}{2}$$

Área da região sombreada $= A_{[AOB]} - A_{\text{setor }[AOC]} =$

$$= \frac{\tan\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}(\tan\alpha - \alpha)$$

Resposta: **(D)**

8. $P\left(\overline{A \cap B} \mid A\right) = \dfrac{P\left(\overline{A \cap B} \cap A\right)}{P(A)} =$

$$= \frac{P\left(\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) \cap A\right)}{P(A)} = \frac{P\left(\left(\overline{A} \cap A\right) \cup \left(\overline{B} \cap A\right)\right)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P\left(\varnothing \cup \left(\overline{B} \cap A\right)\right)}{P(A)} = \frac{P\left(\overline{B} \cap A\right)}{P(A)} = P\left(\overline{B} \mid A\right)$$

Caderno 2

9. $z = \dfrac{8 + 4\mathrm{i}^3}{(\mathrm{i} - 2)^2 - 2 + 3\mathrm{i}^{14}} = \dfrac{8 + 4 \times (-\mathrm{i})}{\mathrm{i}^2 - 4\mathrm{i} + 4 - 2 + 3\mathrm{i}^{3\times4+2}} = \dfrac{8 - 4\mathrm{i}}{-1 - 4\mathrm{i} + 4 - 2 + 3\mathrm{i}^2} =$

$$= \frac{8 - 4\mathrm{i}}{1 - 4\mathrm{i} + 3 \times (-1)} = \frac{8 - 4\mathrm{i}}{-2 - 4\mathrm{i}} = \frac{(8 - 4\mathrm{i})(-2 + 4\mathrm{i})}{(-2 - 4\mathrm{i})(-2 + 4\mathrm{i})} =$$

$$= \frac{-16 + 32\mathrm{i} + 8\mathrm{i} - 16\mathrm{i}^2}{(-2)^2 + 4^2} = \frac{-16 + 40\mathrm{i} + 16}{4 + 16} = \frac{40\mathrm{i}}{20} = 2\mathrm{i}$$

$$\sqrt[3]{4z} = \sqrt[3]{4 \times 2\mathrm{i}} = \sqrt[3]{8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}} = \sqrt[3]{8}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right)} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi + 4k\pi}{6}\right)}, \quad k = 0, 1, 2$$

Se $k = 0$, $z_0 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{6}\right) = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right) = \sqrt{3} + \mathrm{i}$

Se $k = 1$, $z_1 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}} = 2\left(\cos\dfrac{5\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\dfrac{5\pi}{6}\right) = 2\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right) = -\sqrt{3} + \mathrm{i}$

Se $k = 2$, $z_2 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{9\pi}{6}} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}} = -2\mathrm{i}$

As raízes cúbicas de $4z$ são: $\sqrt{3} + \mathrm{i}$, $-\sqrt{3} + \mathrm{i}$ e $-2\mathrm{i}$

10. $\lim u_n = \lim\left(\frac{n+2k}{n+1}\right)^{2n} = \lim\left(\frac{1+\frac{2k}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right)^{2n} = \left[\frac{\lim\left(1+\frac{2k}{n}\right)^n}{\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right]^2 =$

$= \left(\frac{e^{2k}}{e}\right)^2 = \left(e^{2k-1}\right)^2 = e^{4k-2}$

$\lim u_n = \sqrt{e} \Leftrightarrow e^{4k-2} = e^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 4k-2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 8k-4 = 1 \Leftrightarrow 8k = 5 \Leftrightarrow k = \frac{5}{8}$

Resposta: **(B)**

11. Se x^2, x e $\log x$ são os três primeiros termos de uma progressão geométrica de razão r então

$\frac{x}{x^2} = \frac{\log x}{x} = r$.

$\frac{x}{x^2} = \frac{\log x}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{\log x}{x} \Leftrightarrow \log x = 1 \Leftrightarrow x = 10$

$a_1 = x^2 = 10^2 = 100$ e $r = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x} = \frac{1}{10}$

$a_n = u_1 r^{n-1} = 100 \times \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} = 10^2 \times \left(10^{-1}\right)^{n-1} = 10^2 \times 10^{1-n} = 10^{3-n}$

$a_n = 10^{-10} \Leftrightarrow 10^{3-n} = 10^{-10} \Leftrightarrow 3-n = -10 \Leftrightarrow n = 13$

$a_{13} = 10^{-10}$

12. $f(x) = x^2(2\ln x - 3)$; $D_f =]0, +\infty[$

12.1. f é uma função contínua por ser definida pela diferença e produto de funções contínuas.

Logo, como $D_f =]0, +\infty[$, apenas a reta de equação $x = 0$ poderá ser assíntota vertical do gráfico de f.

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left[x^2(2\ln x - 3)\right] \overset{(0\times\infty)}{=}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^2 \times 2\ln x - 3x^2\right) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^2 \times 2\ln x\right) - \lim\limits_{x\to 0^+}\left(3x^2\right) =$

$= \lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^2 \ln x^2\right) - 0 =$ $\quad | \; 2\ln x = \ln x^2, \forall x \in \mathbb{R}^+$

$= \lim\limits_{y\to+\infty}\left[\frac{1}{y}\ln\left(\frac{1}{y}\right)\right] = \lim\limits_{y\to+\infty}\left(\frac{1}{y}\ln y^{-1}\right) =$ $\quad | \; y = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{y}$; Se $x \to 0^+$, $y \to +\infty$

$= \lim\limits_{y\to+\infty}\left(\frac{-\ln y}{y}\right) = -\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{\ln y}{y} = -0 = 0$

Como $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 \in \mathbb{R}$, o gráfico de f não têm assíntotas verticais.

12.2. $f'(x)=\left[x^2(2\ln x-3)\right]'=\left(x^2\right)'(2\ln x-3)+x^2(2\ln x-3)'=$

$$=2x(2\ln x-3)+x^2\left(2\times\frac{1}{x}\right)=2x(2\ln x-3)+2x=$$

$$=2x(2\ln x-3+1)=2x(2\ln x-2)=4x(\ln x-1)$$

$f'(x)=0\Leftrightarrow 4x(\ln x-1)=0\wedge x>0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow(4x=0\vee\ln x-1=0)\wedge x>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(x=0\vee\ln x=1)\wedge x>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\text{e}$$

x	0		e	$+\infty$
f'		$-$	0	$+$
f		$\searrow$	$-\text{e}^2$	$\nearrow$
			Mín.	

$$f(\text{e})=\text{e}^2(2\ln\text{e}-3)=\text{e}^2(2\times1-3)=-\text{e}^2$$

Podemos, assim, concluir que:

- f é estritamente decrescente em $]0,\text{e}]$ e estritamente crescente em $[\text{e},+\infty[$;
- f tem um mínimo relativo igual a $-\text{e}^2$ para $x=\text{e}$.

12.3. Seja $y=mx+b$ a equação reduzida da reta r, tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1.

$m=f'(1)=4\times1\times(\ln1-1)=4\times(0-1)=-4$

Se α é a inclinação da reta r, então $\tan\alpha=-4$ e $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

$$1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$1+(-4)^2=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Leftrightarrow17=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Leftrightarrow\cos^2\alpha=\frac{1}{17}$$

Resposta: **(B)**

13. $D_f=]-\pi,\pi[$; $\quad f(0)=1$; $\quad f'(x)=\dfrac{\cos x}{1+\cos x}$

13.1. $f'(x)=\dfrac{\cos x}{1+\cos x}$

Para todo $x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ vem $\cos x>0$ e $1+\cos>0$. Logo, $f'(x)>0,\forall x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ pelo que a função f é estritamente crescente em $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Assim, podemos concluir que se $a\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, $f(a)>f(0)$, ou seja, $f(a)>1$.

13.2. $f''(x)=\left(\dfrac{\cos x}{1+\cos x}\right)'=\dfrac{(\cos x)'(1+\cos x)-\cos x(1+\cos x)'}{(1+\cos x)^2}=$

$$=\frac{-\sin x(1+\cos x)-\cos x(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}=\frac{-\sin x-\sin x\cos x+\sin x\cos x}{(1+\cos x)^2}=$$

$$=\frac{-\sin x}{(1+\cos x)^2}$$

$$f''(x)=0\Leftrightarrow\frac{-\sin x}{(1+\cos x)^2}=0\wedge x\in\left]-\pi,\pi\right[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow-\sin x=0\wedge x\in\left]-\pi,\pi\right[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sin x=0\wedge x\in\left]-\pi,\pi\right[\Leftrightarrow x=0$$

O sinal da segunda derivada é o sinal de $-\sin x$:

x	$-\pi$		0		π
f''		$+$	0	$-$	
f		$\cup$	1	$\cap$	
			P.I.		

O gráfico da função f tem a concavidade voltada para cima em $\left]-\pi,0\right[$ e voltada para baixo em $\left]0,\pi\right[$. O ponto de abcissa 0 é um ponto de inflexão.

14. Se o ponto de abcissa nula é um ponto de inflexão do gráfico de f então $f''(0)=0$ e $f''(x)$ muda de sinal no ponto $x=0$. Logo, f' tem um extremo para $x=0$.

Resposta: **(D)**

15. $\alpha=\arcsin\left(\sin\dfrac{5\pi}{6}\right)$, $\alpha\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$

$$\sin\frac{5\pi}{6}=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$$

$$\alpha=\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{6}$$

$$\cos\alpha+\sin(2\alpha)=\cos\frac{\pi}{6}+\sin\left(2\times\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}+\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$$

Resposta: **(C)**