Nome ______________________________ N.º ____ Turma _____ Data ____ /jan./2020

Avaliação______________________________ Professor ________________________

Teste 3

FUNÇÕES EXPONENCIAIS E FUNÇÕES LOGARÍTMICAS.
FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEL REAL.
CÁLCULO COMBINATÓRIO.
PROBABILIDADES

Grupo I

Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla. Para cada um deles, escolhe a única opção correta.

1. Seja a um número real maior do que 1.

Seja $b = \log_a(18)$ e seja $c = \log_a(2)$.

Qual é o valor de $a^{\frac{b-c}{2}}$?

(A) 3 **(B)** 6 **(C)** 9 **(D)** 12

2. Sejam a e b números reais maiores do que 1 tais que $\log_b(a) = 4$.

Qual é o valor de $\log_a(ab^2)$?

(A) $\frac{1}{2}$ **(B)** $\frac{3}{4}$ **(C)** $\frac{5}{4}$ **(D)** $\frac{3}{2}$

3. Para um certo número real k , tem-se $\lim\left(1+\frac{k}{4n}\right)^{n+1} = \sqrt{e}$.

Qual é o valor de k ?

(A) $\frac{3}{2}$ **(B)** 2 **(C)** $\frac{5}{2}$ **(D)** 3

4. Qual é o valor de $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x-1}(e^x-1)}{x^2-x}$?

(A) $-e$ **(B)** $-\frac{1}{e}$ **(C)** $\frac{1}{e}$ **(D)** e

5. O código de um cofre é uma sequência de cinco algarismos diferentes de 0.

O João não sabe o código, mas sabe que este contém dois algarismos ímpares diferentes e três algarismos pares, dos quais dois são iguais.

O João vai tentar abrir o cofre.

Qual é a probabilidade (valor arredondado às centésimas de milésimas) de o João o conseguir, com uma única tentativa?

(A) $0{,}000\,12$ **(B)** $0{,}000\,13$ **(C)** $0{,}000\,14$ **(D)** $0{,}000\,15$

Grupo II

Na resposta a cada um dos cinco itens deste grupo, apresenta todos os cálculos que efetuares, explica os raciocínios e justifica as conclusões.

1. Como sabes, 1910 foi o ano da implantação da República em Portugal.

Admite que a população de Portugal Continental, em milhões de habitantes, t anos após o início de 1910, é dada aproximadamente por:

$$p(t) = \frac{11{,}742}{1+1{,}06e^{-0{,}022t}} \quad (t \geq 0)$$

a) De acordo com este modelo, em que ano é que a população de Portugal Continental atingiu dez milhões de habitantes?

b) Desde o instante $t = 0$ até um certo instante $t = a$, a população de Portugal Continental aumentou, em média, 50 000 habitantes por ano. Determina, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o valor de a.

Na tua resposta:

- equaciona o problema;
- reproduz, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que te permite(m) resolver a equação;
- apresenta o valor de a arredondado às unidades.

2. Seja f a função de domínio $\mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{x-1} - x + 3 & \text{se } x \leq 1 \\ \frac{\ln(4x-3)}{x-1} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

a) Justifica que a função f é contínua.

b) Estuda a função f quanto às assíntotas ao seu gráfico.

c) Estuda, quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, a restrição da função f ao intervalo $]-\infty, 1]$.

3. Para cada número real k, seja g a função de domínio $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ definida por:

$$g(x) = k + \frac{x+2}{2}\ln(2x+1) - \ln(5)$$

a) Determina o conjunto dos valores de k para os quais o teorema de Bolzano-Cauchy, aplicado no intervalo $[0, 2]$, garante a existência de pelo menos um zero da função g em $]0, 2[$.

b) Considera $k = 0$. Estuda a função g quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

4. Seja E o espaço amostral associado a uma experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset E$ e $B \subset E$).

Sabe-se que $P(B) \neq 1$ e que A e $\overline{B}$ são acontecimentos equiprováveis.

Prova que $P\left(\overline{A}|\overline{B}\right) - P(A \cap B) = P(B) \times P(B|A)$.

5. Seja f a função de domínio $\mathbb{R}^+$ definida por $f(x) = p\log_q(x)$

(p designa um número real positivo e q designa um número real maior do que 1).

Seja a um número real positivo. Seja A o ponto do gráfico de f cuja abcissa é a e seja r a reta tangente ao gráfico de f no ponto A.

Sejam B e C os pontos de interseção da reta r com os eixos das ordenadas e das abcissas, respetivamente. Sabe-se que o ponto B tem ordenada positiva.

Seja D o ponto de coordenadas $(a, 0)$.

Determina o valor de a, sabendo que o triângulo $[ACD]$ é isósceles e que o triângulo $[BCD]$ é retângulo.

FIM