5+5

Teste 4

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS
FUNÇÕES EXPONENCIAIS E FUNÇÕES LOGARÍTMICAS. FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEL REAL.
CÁLCULO COMBINATÓRIO. PROBABILIDADES

Proposta de resolução

Grupo I

1. (A)

Tem-se:

- $f(0) < 0$
- $f'(0) > 0$ (a reta tangente ao gráfico, no ponto de abcissa 0, tem declive positivo)
- $f''(0) < 0$ (o gráfico tem a concavidade voltada para baixo, pelo que $\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) < 0$)

Portanto, tem-se $f(0) \times f''(0) > 0$, pelo que $f'(0) + f(0) \times f''(0) > 0$.

2. (A)

$$\frac{\log_a(9) + 2\log_a(4)}{\log_a(24) - \log_a(2)} = \frac{\log_a(9\times 4^2)}{\log_a\left(\frac{24}{2}\right)} = \frac{\log_a(144)}{\log_a(12)} = \log_{12}(144) = 2$$

3. (C)

Aplicando a «lei dos senos», pode escrever-se:

$$\frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{6} = \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{4} \Leftrightarrow \frac{2\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha)}{6} = \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{4} \Leftrightarrow \cos(\alpha) = \frac{3}{4}$$

Portanto, tem-se:

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \operatorname{sen}^2(\alpha) = \cos^2(\alpha) - [1 - \cos^2(\alpha)] =$$

$$= \cos^2(\alpha) - 1 + \cos^2(\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1 = 2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 - 1 = 2 \times \frac{9}{16} - 1 =$$

$$= \frac{9}{8} - 1 = \frac{1}{8}$$

4. (D)

Tem-se: $\operatorname{sen}^2 x = b \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \sqrt{b} \ \vee\ \operatorname{sen} x = -\sqrt{b}$

Portanto,

- em $[0, 2\pi]$, a equação $\operatorname{sen}^2 x = b$ tem quatro soluções;
- em $[2\pi, 4\pi]$, a equação $\operatorname{sen}^2 x = b$ tem quatro soluções;
- em $\left[4\pi, \frac{9\pi}{2}\right]$, a equação $\operatorname{sen}^2 x = b$ tem uma solução.

Assim, o conjunto S tem nove elementos.

Em $\left[\frac{5\pi}{2}, 4\pi\right]$, a equação $\operatorname{sen}^2 x = b$ tem três soluções.

A probabilidade pedida é, assim, igual a $\frac{{}^3C_2}{{}^9C_2} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

5. (B)

Relativamente à experiência aleatória «escolha ao acaso de um atleta do clube», sejam A e B os acontecimentos:

A : «o atleta pratica andebol»;

B : «o atleta pratica basquetebol».

De acordo com o enunciado, tem-se:

- há tantos praticantes de andebol como de basquetebol, ou seja, $P(A) = P(B)$;
- um terço dos praticantes de basquetebol pratica andebol, ou seja, $P(A|B) = \frac{1}{3}$;
- metade dos atletas do clube não pratica andebol nem basquetebol, ou seja, $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{1}{2}$.

Pretende-se obter $P(A)$.

Tem-se:

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow P(\overline{A \cup B}) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow P(A \cup B) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(B) \times P(A|B) = \frac{1}{2}$$

Como $P(B) = P(A)$ e $P(A|B) = \frac{1}{3}$, vem:

$$P(A) + P(A) - P(A) \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\,P(A) - \frac{P(A)}{3} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{5\,P(A)}{3} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow P(A) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} \Leftrightarrow P(A) = \frac{3}{10} \Leftrightarrow P(A) = 0{,}3$$

Grupo II

1. Tem-se:

Área do triângulo $[OPQ] = \frac{\overline{OQ} \times \overline{PQ}}{2} = \frac{-\cos(\alpha) \times \operatorname{sen}(\alpha)}{2} = -\frac{\cos(\alpha) \times \operatorname{sen}(\alpha)}{2}$

Área do triângulo $[ORS] = \frac{\overline{SR} \times \overline{OS}}{2} = \frac{-\operatorname{tg}(\alpha) \times 1}{2} = -\frac{\operatorname{tg}(\alpha)}{2}$

Portanto, a área do triângulo $[ORS]$ é dupla da área do triângulo $[OPQ]$ se e só se:

$$-\frac{\operatorname{tg}(\alpha)}{2} = 2 \times \left[-\frac{\cos(\alpha) \times \operatorname{sen}(\alpha)}{2}\right]$$

Para $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, tem-se:

$$-\frac{\operatorname{tg}(\alpha)}{2} = 2 \times \left[-\frac{\cos(\alpha) \times \operatorname{sen}(\alpha)}{2}\right] \Leftrightarrow \operatorname{tg}(\alpha) = 2\cos(\alpha)\operatorname{sen}(\alpha) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} = 2\cos(\alpha)\operatorname{sen}(\alpha) \Leftrightarrow 2\cos^2(\alpha) = 1 \Leftrightarrow \cos^2(\alpha) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(\alpha) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{3\pi}{4}$$

2.

a) Tem-se:

$$f'(x) = \left(2 - e^{\sqrt{3}x}\cos x\right)' = -\left(e^{\sqrt{3}x}\cos x\right)' = -\left(\sqrt{3}\,e^{\sqrt{3}x}\cos x - e^{\sqrt{3}x}\,\mathrm{sen}\,x\right) =$$

$$= e^{\sqrt{3}x}\,\mathrm{sen}\,x - \sqrt{3}\,e^{\sqrt{3}x}\cos x$$

Em $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right[$, tem-se:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{\sqrt{3}x}\left(\mathrm{sen}\,x - \sqrt{3}\cos x\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{sen}\,x - \sqrt{3}\cos x = 0 \Leftrightarrow \mathrm{sen}\,x = \sqrt{3}\cos x \Leftrightarrow \frac{\mathrm{sen}\,x}{\cos x} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \mathrm{tg}\,x = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}$$

x	$-\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
f'	$-$	$-$	0	$+$
f	máx.	$\searrow$	mín.	$\nearrow$

Portanto, a função é decrescente em $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$ e é crescente em $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right[$.

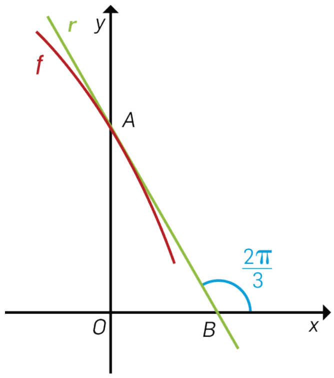
A função atinge um máximo relativo para $x = -\frac{\pi}{3}$ e atinge um mínimo relativo para $x = \frac{\pi}{3}$.

b) O declive da reta r é $f'(0)$.

$f'(0) = e^0\,\mathrm{sen}\,0 - \sqrt{3}\,e^0\cos 0 = -\sqrt{3}$

Assim, a inclinação da reta r é igual a $\frac{2\pi}{3}$, pelo que $A\hat{B}O = \frac{\pi}{3}$.

Portanto, $O\hat{A}B = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$.



Outro processo de resolução:

O declive da reta r é $f'(0)$.

$f'(0) = e^0\,\mathrm{sen}\,0 - \sqrt{3}\,e^0\cos 0 = -\sqrt{3}$

Tem-se $f(0) = 2 - e^0\cos 0 = 2 - 1 = 1$; portanto, o ponto A tem coordenadas $(0, 1)$.

Assim, $y = -\sqrt{3}x + 1$ é a equação reduzida da reta r.

O ponto B é o ponto de interseção da reta r com o eixo Ox; portanto, as coordenadas do ponto B são $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right)$.

Tem-se $O\hat{A}B = \overrightarrow{AO}\,\hat{}\,\overrightarrow{AB}$, com $\overrightarrow{AO}(0, -1)$ e $\overrightarrow{AB}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -1\right)$.

Assim, $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB} = 1$, $\|\overrightarrow{AO}\| = 1$ e $\|\overrightarrow{AB}\| = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Recorrendo ao produto escalar, tem-se:

$$\cos\left(\overrightarrow{AO}\,\hat{}\,\overrightarrow{AB}\right) = \frac{\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AO}\| \times \|\overrightarrow{AB}\|} = \frac{1}{1 \times \frac{2}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Portanto, $O\hat{A}B = \frac{\pi}{6}$.

3.

a)

- $\lim\limits_{x\to 0^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}\left(3x + 2 + \frac{\ln(1-x)}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0^-}(3x + 2) + \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\ln(1-x)}{x} =$

$= 2 + \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\ln(1-x)}{x}$

Seja $y = \ln(1-x)$. Vem $1 - x = e^y \Leftrightarrow x = -e^y + 1$.
Quando $x \to 0^-$, tem-se que $y \to 0^+$.

Portanto, $2 + \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\ln(1-x)}{x} = 2 + \lim\limits_{y\to 0^+}\frac{y}{-e^y+1} =$
$= 2 - \lim\limits_{y\to 0^+}\frac{1}{\frac{e^y-1}{y}} = 2 - \frac{1}{1} = 1$

- $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen}(2x)}{x\,(1+\cos x)} = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen}(2x)}{x} \times \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{1+\cos x} =$

$= \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2\operatorname{sen}(2x)}{2x} \times \frac{1}{1+1} = 2 \times \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen}(2x)}{2x} \times \frac{1}{2} =$

$= 2 \times \lim\limits_{y\to 0^+}\frac{\operatorname{sen} y}{y} \times \frac{1}{2} = 2 \times 1 \times \frac{1}{2} = 1$

- $h(0) = 1$

Como $\lim\limits_{x\to 0^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = h(0)$, concluímos que a função h é contínua no ponto 0.

b) Uma vez que a função h é contínua em $]-\infty, \pi[$, só a reta de equação $x = \pi$ pode ser assíntota vertical ao gráfico da função h.

Tem-se :

$\lim\limits_{x\to \pi^-} h(x) = \lim\limits_{x\to \pi^-}\frac{\operatorname{sen}(2x)}{x\,(1+\cos x)} = \lim\limits_{x\to \pi^-}\frac{1}{x} \times \lim\limits_{x\to \pi^-}\frac{\operatorname{sen}(2x)}{1+\cos x} =$

$= \frac{1}{\pi} \times \lim\limits_{x\to \pi^-}\frac{2\operatorname{sen} x\cos x}{1+\cos x} = \frac{1}{\pi} \times \lim\limits_{x\to \pi^-}(2\cos x) \times \lim\limits_{x\to \pi^-}\frac{\operatorname{sen} x\,(1-\cos x)}{(1+\cos x)(1-\cos x)} =$

$= \frac{1}{\pi} \times (-2) \times \lim\limits_{x\to \pi^-}\frac{\operatorname{sen} x\,(1-\cos x)}{1-\cos^2 x} = -\frac{2}{\pi} \times \lim\limits_{x\to \pi^-}\frac{\operatorname{sen} x\,(1-\cos x)}{\operatorname{sen}^2 x} =$

$= -\frac{2}{\pi} \times \lim\limits_{x\to \pi^-}\frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x} = -\frac{2}{\pi} \times \frac{2}{0^+} = -\frac{2}{\pi} \times (+\infty) = -\infty$

Portanto, a reta de equação $x = \pi$ é assíntota vertical ao gráfico da função h.

Estudemos agora o comportamento da função, quando $x \to -\infty$.

$$\lim_{x\to -\infty}[h(x) - (3x+2)] = \lim_{x\to -\infty}\frac{\ln(1-x)}{x} = \lim_{x\to -\infty}\left[\frac{\ln(1-x)}{1-x} \times \frac{1-x}{x}\right] =$$

$$= \lim_{x\to -\infty}\frac{\ln(1-x)}{1-x} \times \lim_{x\to -\infty}\frac{1-x}{x} \underset{y=1-x}{=} \lim_{y\to +\infty}\frac{\ln y}{y} \times (-1) = 0 \times (-1) = 0$$

Portanto, a reta de equação $y = 3x + 2$ é assíntota ao gráfico da função h em $-\infty$.

c) Tem-se que:

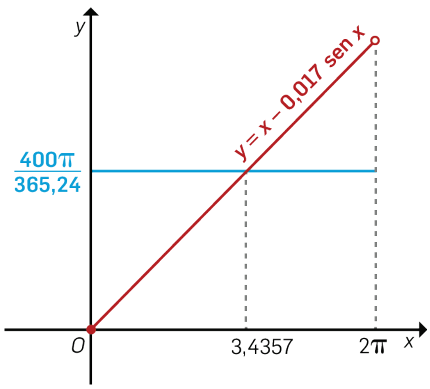
- a função h é contínua em $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$
- $h\left(\frac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\text{sen}\,\frac{2\pi}{3}}{\frac{\pi}{3}\left(1+\cos\frac{\pi}{3}\right)} = \dfrac{\text{sen}\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)}{\frac{\pi}{3}\left(1+\frac{1}{2}\right)} = \dfrac{\text{sen}\,\frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{3}\times\frac{3}{2}} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\pi}$
- $h\left(\frac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\text{sen}\,\pi}{\frac{\pi}{2}\left(1+\cos\frac{\pi}{2}\right)} = \dfrac{0}{\frac{\pi}{2}(1+0)} = 0$

Como a função h é contínua em $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ e como $h\left(\frac{\pi}{2}\right) < \frac{1}{\pi} < h\left(\frac{\pi}{3}\right)$,

o teorema de Bolzano-Cauchy permite concluir que $\exists\, c \in \left]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right[\, : \, h(c) = \frac{1}{\pi}$.

4. Substituindo t por 200 na relação $\dfrac{2\pi t}{365{,}24} = x - 0{,}017\,\text{sen}\,x$,

vem $x - 0{,}017\,\text{sen}\,x = \dfrac{400\,\pi}{365{,}24}$.



Na figura, reproduz-se o gráfico da função definida por $y = x - 0{,}017\ \text{sen}\,x$, bem como a reta de equação $y = \dfrac{400\,\pi}{365{,}24}$, visualizados na calculadora.

A abcissa do ponto de interseção das duas linhas é o valor de x, 200 dias depois de a Terra ter passado pelo periélio.

Tem-se $x \approx 3{,}4357$.

Assim, a distância, em milhões de quilómetros, a que a Terra se encontra do Sol, 200 dias depois de ter passado pelo periélio, é dada aproximadamente por $\dfrac{149{,}6}{1+0{,}017\cos(3{,}4357)}$.

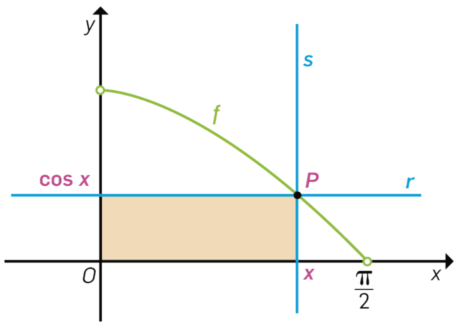
Tem-se: $\dfrac{149{,}6}{1+0{,}017\cos(3{,}4357)} \approx 152{,}1$

Portanto, a distância a que a Terra se encontra do Sol, 200 dias depois de ter passado pelo periélio, é aproximadamente igual a 152,1 milhões de quilómetros.

5. A região limitada pelos eixos coordenados e pelas retas r e s é um retângulo de lados x e $\cos x$, cuja área é, portanto, $x \cos x$.

Tem-se assim que g é a função de domínio $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ definida por $g(x) = x \cos x$.

Seja h a função de domínio $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ definida por $h(x) = x \cos x$.



Esta função é contínua e está definida num intervalo limitado e fechado, pelo que, de acordo com o teorema de Weierstrass, tem máximo e mínimo absolutos.

Como esta função nunca toma valores negativos, o mínimo da função é zero, valor que é atingido nos extremos do intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Ora, como a função h não é sempre nula, o máximo é um valor positivo, atingido em $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ e, dado que $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \ g(x) = h(x)$, conclui-se que a função g tem máximo.