5+5

Teste 3

FUNÇÕES EXPONENCIAIS E FUNÇÕES LOGARÍTMICAS. FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEL REAL. CÁLCULO COMBINATÓRIO. PROBABILIDADES

Proposta de resolução

Grupo I

1. **(A)**

De $b = \log_a(18)$ vem $a^b = 18$ e de $c = \log_a(2)$ vem $a^c = 2$.

Assim:

$$a^{\frac{b-c}{2}} = \sqrt{a^{b-c}} = \sqrt{\frac{a^b}{a^c}} = \sqrt{\frac{18}{2}} = \sqrt{9} = 3$$

2. **(D)**

$$\log_a(ab^2) = \log_a(a) + \log_a(b^2) = 1 + 2\log_a(b) = 1 + 2 \times \frac{1}{\log_b(a)} = 1 + 2 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{2}$$

3. **(B)**

$$\lim\left(1 + \frac{k}{4n}\right)^{n+1} = \lim\left(1 + \frac{k}{4n}\right)^{n} \times \lim\left(1 + \frac{k}{4n}\right) = \lim\left(1 + \frac{\frac{k}{4}}{n}\right)^{n} \times 1 = e^{\frac{k}{4}}$$

$$e^{\frac{k}{4}} = \sqrt{e} \Leftrightarrow \frac{k}{4} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow k = 2$$

4. **(B)**

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x-1}(e^x - 1)}{x^2 - x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{x-1}(e^x - 1)}{x(x-1)} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{e^{x-1}}{x-1} \times \frac{e^x - 1}{x}\right) = \frac{e^{-1}}{-1} \times 1 = -\frac{1}{e}$$

5. **(C)**

Número de casos possíveis: ${}^5C_2 \times {}^5A_2 \times 4 \times {}^3C_2 \times 3 = 7200$

Número de casos favoráveis: 1

Probabilidade pedida: $\frac{1}{7200} \approx 0{,}000\,14$

Grupo II

1.

a) Tem-se:

$$p(t) = 10 \Leftrightarrow \frac{11{,}742}{1 + 1{,}06\,e^{-0{,}022\,t}} = 10 \Leftrightarrow \frac{11{,}742}{10} = 1 + 1{,}06\,e^{-0{,}022\,t} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1{,}1742 = 1 + 1{,}06\,e^{-0{,}022\,t} \Leftrightarrow 0{,}1742 = 1{,}06\,e^{-0{,}022\,t} \Leftrightarrow e^{-0{,}022\,t} = \frac{0{,}1742}{1{,}06} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -0{,}022\,t = \ln\left(\frac{0{,}1742}{1{,}06}\right) \Leftrightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{0{,}1742}{1{,}06}\right)}{-0{,}022}$$

Portanto, $t \approx 82{,}08$

Tem-se: $1910 + 82{,}08 = 1992{,}08$

Concluímos assim que foi no decurso do ano de 1992 que a população de Portugal Continental atingiu 10 milhões de habitantes.

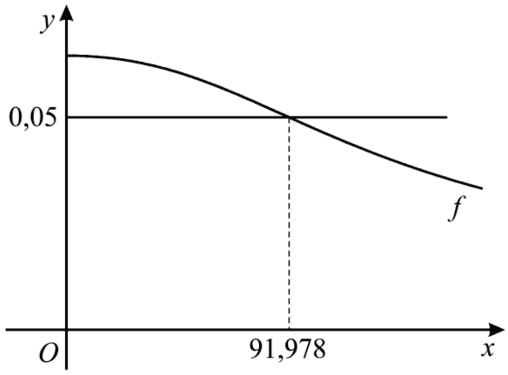
b) Uma vez que 50 000 é igual a 0,05 milhões, afirmar que «desde o instante $t = 0$ até um certo instante $t = a$, a população de Portugal Continental aumentou, em média, 50 000 habitantes por ano» é equivalente a dizer que a taxa média de variação da função p, no intervalo $[0, a]$, é igual a 0,05.

Assim, tem-se: $\dfrac{p(a) - p(0)}{a-0} = 0{,}05$

Ora, $\dfrac{p(a) - p(0)}{a-0} = 0{,}05 \Leftrightarrow \dfrac{p(a) - 5{,}7}{a} = 0{,}05 \Leftrightarrow \dfrac{\frac{11{,}742}{1 + 1{,}06\, e^{-0{,}022\, a}} - 5{,}7}{a} = 0{,}05$

Na figura ao lado estão representados, em referencial xOy:

- o gráfico da função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por:
  $f(x) = \dfrac{\frac{11{,}742}{1 + 1{,}06\, e^{-0{,}022\, x}} - 5{,}7}{x}$
- a reta de equação: $y = 0{,}05$



A abcissa do ponto de interseção dos dois gráficos é aproximadamente igual a 91,978.

Portanto, $a \approx 92$

2.

a) Tem-se:
- f é contínua em $]-\infty, 1[$ pois é soma de funções contínuas;
- f é contínua em $]1, +\infty[$ pois é quociente de funções contínuas.

Vejamos que f é contínua no ponto 1.

Tem-se:

- $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (2\, e^{x-1} - x + 3) = 2 - 1 + 3 = 4$

- $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{\ln(4x-3)}{x-1}$ Estamos perante uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$.

  Para a levantar, façamos a mudança de variável $y = \ln(4x - 3)$.
  Quando $x \to 1$ tem-se que $y \to 0$.
  Além disso, $y = \ln(4x - 3) \Leftrightarrow x = \dfrac{e^y + 3}{4}$

Vem, então:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(4x-3)}{x-1} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\frac{e^y+3}{4}-1} = \lim_{y\to 0}\frac{4y}{e^y-1} = 4\lim_{y\to 0}\frac{y}{e^y-1} =$$

$$= 4\lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{e^y-1}{y}} = 4\times\frac{1}{1} = 4$$

- $f(1)=4$

Como $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$, a função f é contínua no ponto 1.

Assim, f é uma função contínua.

b) Como f é uma função contínua em $\mathbb{R}$, o seu gráfico não tem assíntotas verticais. Estudemos a função quanto à existência de assíntotas não verticais ao seu gráfico.

Tem-se:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(4x-3)}{x-1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\ln(4x-3)}{4x-3}}{\frac{x-1}{4x-3}} = \frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(4x-3)}{4x-3}}{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-1}{4x-3}} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{\ln y}{y}}{\frac{1}{4}} = \frac{0}{\frac{1}{4}} = 0$$

Portanto, a reta de equação $y=0$ é assíntota horizontal ao gráfico de f, em $+\infty$.

Estudemos agora o comportamento da função, quando x tende para $-\infty$.

Tem-se:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2e^{x-1}-x+3}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2e^{x-1}}{x} - 1 + \frac{3}{x}\right) =$$

$$= \frac{2e^{-\infty}}{-\infty} - 1 + \frac{3}{-\infty} = 0-1+0 = -1$$ Designemos este valor por m.

Tem-se:

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-mx] = \lim_{x\to-\infty}(2e^{x-1}-x+3+x) = \lim_{x\to-\infty}(2e^{x-1}+3) = 2e^{-\infty}+3 =$$

$$= 2\times 0+3 = 3$$

Portanto, a reta de equação $y=-x+3$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f, em $-\infty$.

c) Seja g a restrição da função f ao intervalo $]-\infty, 1]$.

Tem-se: $g'(x) = (2\,e^{x-1} - x + 3)' = 2\,e^{x-1} - 1$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\,e^{x-1} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{x-1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x - 1 = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x - 1 = -\ln(2) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = 1 - \ln(2)$

x	$-\infty$	$1-\ln(2)$		1
g'	$-$	0	$+$	$+$
g	$\searrow$	mín. rel.	$\nearrow$	máx. rel.

Portanto, a função g é decrescente em $]-\infty, 1-\ln(2)]$ e é crescente em $[1-\ln(2), 1]$; atinge um mínimo relativo para $x = 1 - \ln(2)$ e atinge um máximo relativo para $x = 1$.

3.

a) Para cada valor de k, a função g é contínua em todo o seu domínio, pelo que é contínua em $[0, 2]$.

Portanto, o teorema de Bolzano-Cauchy, aplicado no intervalo $[0, 2]$, garante a existência de pelo menos um zero da função g no intervalo $]0, 2[$ se e só se $g(0)$ e $g(2)$ têm sinais contrários, ou seja, se e só se $g(0) \times g(2) < 0$.

Ora, $g(0) \times g(2) < 0 \Leftrightarrow (k - \ln(5))(k + \ln(5)) < 0 \Leftrightarrow k \in]-\ln(5), \ln(5)[$

b) Tem-se:

$$g'(x) = \left(\frac{x+2}{2}\ln(2x+1) - \ln(5)\right)' = \left(\frac{x+2}{2}\ln(2x+1)\right)' =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(2x+1) + \frac{x+2}{2} \times \frac{2}{2x+1} = \frac{1}{2}\ln(2x+1) + \frac{x+2}{2x+1}$$

$$g''(x) = \left(\frac{1}{2}\ln(2x+1) + \frac{x+2}{2x+1}\right)' = \frac{1}{2} \times \frac{2}{2x+1} + \frac{2x+1-2(x+2)}{(2x+1)^2} =$$

$$= \frac{1}{2x+1} + \frac{-3}{(2x+1)^2} = \frac{2x+1-3}{(2x+1)^2} = \frac{2x-2}{(2x+1)^2}$$

$g''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

x	$-\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
g''	$-$	0	$+$
g	$\cap$	p.i.	$\cup$

O gráfico da função g tem a concavidade voltada para baixo em $\left]-\frac{1}{2}, 1\right]$, tem a concavidade voltada para cima em $[1, +\infty[$ e tem um ponto de inflexão cuja abcissa é 1.

4. Tem-se, de acordo com o enunciado, que $P(A)=P(\overline{B})$. Vem, então:

$$P(\overline{A}\,|\,\overline{B})-P(A\cap B)=\frac{P(\overline{A}\cap\overline{B})}{P(\overline{B})}-P(A\cap B)=\frac{P(\overline{A\cup B})}{P(A)}-P(A\cap B)=$$

$$=\frac{1-P(A\cup B)}{P(A)}-P(A\cap B)=\frac{1-P(A\cup B)-P(A)\times P(A\cap B)}{P(A)}=$$

$$=\frac{1-[P(A)+P(B)-P(A\cap B)]-P(A)\times P(A\cap B)}{P(A)}=$$

$$=\frac{1-P(A)-P(B)+P(A\cap B)-P(A)\times P(A\cap B)}{P(A)}=$$

$$=\frac{1-P(B)-P(A)+P(A\cap B)\times[1-P(A)]}{P(A)}=\frac{P(\overline{B})-P(A)+P(A\cap B)\times[1-P(\overline{B})]}{P(A)}=$$

$$=\frac{P(A)-P(A)+P(A\cap B)\times P(B)}{P(A)}=\frac{P(A\cap B)\times P(B)}{P(A)}=P(B)\times\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=$$

$$=P(B)\times P(B|A)$$

Outro processo:

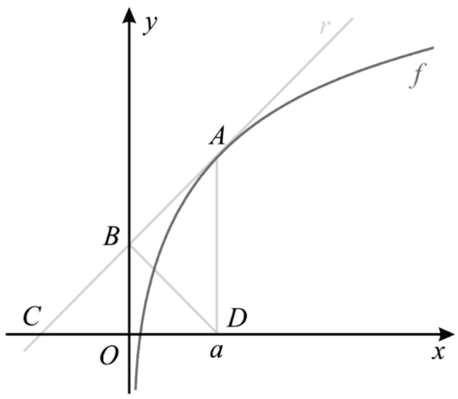
$$P(\overline{A}\,|\,\overline{B})-P(A\cap B)=1-P(A|\,\overline{B})-P(A\cap B)=1-\frac{P(A\cap\overline{B})}{P(\overline{B})}-P(A\cap B)=$$

$$=1-\frac{P(A\cap\overline{B})}{P(A)}-P(A\cap B)=\frac{P(A)-P(A\cap\overline{B})}{P(A)}-P(A\cap B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}-P(A\cap B)=$$

$$=\frac{P(A\cap B)-P(A)\times P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}\times(1-P(A))=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}\times(1-P(\overline{B}))=$$

$$=P(B|A)\times P(B)$$

5. A figura ao lado ilustra a situação.



Como o triângulo $[ACD]$ é isósceles e retângulo, tem-se $A\hat{C}D=45°$, pelo que:
- a reta r tem declive igual a 1;
- $\overline{OC}=\overline{OB}$.

Como o triângulo $[BCD]$ é retângulo, tem-se que $BD\perp r$, pelo que a reta BD tem declive igual a -1, donde vem que $B\hat{D}O=45°$.

Portanto, $\overline{OC}=\overline{OB}=\overline{OD}=a$, pelo que $\overline{CD}=2a$, donde vem $\overline{AD}=2a$.

Tem-se, portanto, $f(a) = 2a$, ou seja, $\boxed{p\log_q(a) = 2a}$

Por outro lado, como a reta r é tangente ao gráfico da função f , no ponto de abcissa a , o seu declive é igual a $f'(a)$.

Tem-se $f'(x) = (p\log_q(x))' = \frac{p}{x\ln(q)}$ pelo que $f'(a) = \frac{p}{a\ln(q)}$.

Como o declive da reta r é igual a 1, tem-se $\frac{p}{a\ln(q)} = 1$, donde vem: $\boxed{p = a\ln(q)}$

Tem-se, assim: $\boxed{p\log_q(a) = 2a}$ e $\boxed{p = a\ln(q)}$. Vem então:

$$p\log_q(a) = 2a \Leftrightarrow \frac{p\ln(a)}{\ln(q)} = 2a \Leftrightarrow \frac{a\ln(q)\ \ln(a)}{\ln(q)} = 2a \Leftrightarrow a\ln(a) = 2a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln(a) = 2 \Leftrightarrow a = e^2$$