Teste 2

FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEL REAL. CÁLCULO COMBINATÓRIO. PROBABILIDADES

Proposta de resolução

Grupo I

1. (C)

$u_n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1+n}{2} \times n = \frac{n^2+n}{2}$, portanto, $\lim \frac{n^2}{u_n} = \lim \frac{n^2}{\frac{n^2+n}{2}} = \lim \frac{2n^2}{n^2+n} = \lim \frac{2n^2}{n^2} = 2$

2. (A)

O teorema de Lagrange permite concluir que:

$\exists x \in \left]-3,0\right[: f'(x) = \frac{f(0)-f(-3)}{0-(-3)}$, ou seja, $\exists x \in \left]-3,0\right[: f'(x) = \frac{2-f(-3)}{3}$.

Seja $a \in \left]-3,0\right[$ uma solução da equação $f'(x) = \frac{2-f(-3)}{3}$.

Tem-se que $f'(a) \in [-5,2]$ e, portanto, $\frac{2-f(-3)}{3} \in [-5,-2]$.

$\frac{2-f(-3)}{3} \geq -5 \Leftrightarrow 2-f(-3) \geq -15 \Leftrightarrow f(-3) \leq 17$

$\frac{2-f(-3)}{3} \leq -2 \Leftrightarrow 2-f(-3) \leq -6 \Leftrightarrow f(-3) \geq 8$

Dos valores indicados, $f(-3)$ só não pode tomar o valor 7.

3. (D)

Número de casos possíveis: ${}^6C_2 = 15$

Número de caso favoráveis: 3

Probabilidade pedida: $\frac{3}{15} = \frac{1}{5}$

4. (B)

A linha em que o maior elemento é ${}^nC_3$ é a linha cujos elementos são da forma ${}^6C_k$.

Os elementos dessa linha são: 1 6 15 20 15 6 1

Os números naturais múltiplos de 10 que se podem escrever com os algarismos dessa linha são os números que se escrevem com quatro algarismos iguais a 1, dois algarismos iguais a 6, dois algarismos iguais a 5, um algarismo igual a 2, sendo o algarismo das unidades obrigatoriamente igual a 0.

O valor pedido é dado por ${}^9C_4 \times {}^5C_2 \times {}^3C_2 = 3780$.

5. (C)

Existem 4×4 maneiras de escolher a rapariga e o rapaz que vão ficar em pé. Para cada uma destas escolhas há $6!$ hipóteses de sentar os seis jovens nos seis lugares disponíveis.

A resposta pode ser dada por $4 \times 4 \times 6! = 11\,520$.

Grupo II

1. Dado que, para qualquer número natural $n, 1-2\sqrt{n}$ designa um número negativo, tem-se, para qualquer número natural k entre 1 e n, $\frac{1-2\sqrt{n}}{n+k} \leq \frac{1-2\sqrt{n}}{n+n}$. Assim, pode concluir-se que $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^{n} \frac{1-2\sqrt{n}}{n+k} \leq n \times \frac{1-2\sqrt{n}}{n+n}$.

Tem-se: $\lim\left(n \times \frac{1-2\sqrt{n}}{n+n}\right) = \lim \frac{1-2\sqrt{n}}{2} = -\infty$

Portanto, por comparação, conclui-se que $\lim v_n = -\infty$ e, ainda por comparação, também se conclui que $\lim u_n = -\infty$, pois $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n + 1$. Trata-se, portanto, de uma sucessão divergente.

2.

a) Tem-se: $h(x) = -x^3 + x^2 - 1$

$h'(x) = -3x^2 + 2x$

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(-3x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{2}{3}$

x	$-\infty$	0		$\frac{2}{3}$	$+\infty$
Zeros e sinal de h'	$-$	0	$+$	0	$-$
Monotonia e extremos de h	↘	Mín.	↗	Máx.	↘

A função h é decrescente em $]-\infty, 0]$ e em $\left[\frac{2}{3}, +\infty\right[$ e é crescente em $\left[0, \frac{2}{3}\right]$.

A função atinge um mínimo relativo igual a -1 em 0 e atinge um máximo relativo igual a $-\frac{23}{27}$ em $\frac{2}{3}$.

$h''(x) = -6x + 2$

$h''(x) = 0 \Leftrightarrow -6x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
Zero e sinal de h''	$+$	0	$-$
Concavidade e pontos de inflexão do gráfico de h	$\cup$	P.I.	$\cap$

O gráfico da função h tem a concavidade voltada para cima em $\left]-\infty, \frac{1}{3}\right]$ e tem a concavidade voltada para baixo em $\left[\frac{1}{3}, +\infty\right[$; $h\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{25}{27}$ e, portanto, o ponto de coordenadas $\left(\frac{1}{3}, -\frac{25}{27}\right)$ é ponto de inflexão do gráfico da função h.

b) A função g é contínua, portanto, só as retas de equações $x=-1$ e $x=0$ poderão ser assíntotas verticais ao gráfico da função.

$$\lim_{x\to-1} g(x) = \lim_{x\to-1^-} \frac{x^3-x^2+x+3}{x^2-1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to-1^-} \frac{(x+1)(x^2-2x+3)}{(x+1)(x-1)} =$$

Cálculos auxiliares:

	1	−1	1	3
−1		−1	2	−3
	1	−2	3	$\boxed{0}$

$$= \lim_{x\to-1^-} \frac{x^2-2x+3}{x-1} = \frac{1+2+3}{-2} = -3$$

A reta de equação $x=-1$ não é assíntota ao gráfico da função g.

$$\lim_{x\to0} g(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}-1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to0^+} \frac{2x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)} = \lim_{x\to0^+} \frac{2x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{x^2+1-1} =$$

$$= \lim_{x\to0^+} \frac{2x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{x^2} = \lim_{x\to0^+} \frac{2\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{x} = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

A reta de equação $x=0$ é assíntota ao gráfico da função g.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-x^2+x+3}{x^3-x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} (g(x)-x) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^3-x^2+x+3}{x^2-1} - x\right) \overset{\infty-\infty}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-x^2+x+3-x^3+x}{x^2-1} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^2+2x+3}{x^2-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^2}{x^2} = -1$$

A reta de equação $y=x-1$ é assíntota ao gráfico da função g, em $-\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}-1} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{x}} = \frac{2}{\sqrt{1+0}-0} = 2$$

A reta de equação $y=2$ é assíntota ao gráfico da função g, em $+\infty$.

Portanto, existem exatamente três assíntotas ao gráfico da função g: uma assíntota vertical, uma assíntota oblíqua e uma assíntota horizontal.

3. Dado que a reta de equação $y=3x+5$ é tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa -1, sabe-se que $f'(-1)=3$ e que $f(-1)=3\times(-1)+5=2$.

$$g(-1) = \frac{f^3(-1)}{(-1)^2+1} = \frac{2^3}{2} = 4$$

$$g'(x) = \left(\frac{f^3(x)}{x^2+1}\right)' = \frac{3f^2(x)f'(x)(x^2+1)-f^3(x)2x}{(x^2+1)^2}$$

$$g'(-1)=\frac{3f^2(-1)f'(-1)(1+1)-f^3(-1)\times(-2)}{(1+1)^2}=\frac{3\times2^2\times3\times2+8\times2}{4}=22$$

Sendo $g(-1)=4$ e $g'(-1)=22$, uma equação da reta tangente ao gráfico da função g no ponto de abcissa -1 é $y=22(x+1)+4$.

A equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função g no ponto de abcissa -1 é $y=22x+26$.

4. Dado que a função f' é contínua em $\mathbb{R}$ (pois f é duas vezes diferenciável), então é contínua em $[a,b]$. Como $f'(a)\times f'(b)<0$, o corolário do teorema de Bolzano-Cauchy permite concluir que a função f' tem pelo menos um zero em $]a,b[$. Esse zero é único, pois, dado que $\forall x\in\,]a,b[\,, f''(x)>0$, a função f' é estritamente crescente em $]a,b[$.

Portanto, a função f não pode atingir mais do que um extremo em $]a,b[$, pois, sendo diferenciável, se atinge um extremo num ponto, então a derivada é nula nesse ponto.
Seja c o único zero de f' em $]a,b[$.

Tem-se $f'(c)=0$ e $f''(c)>0$, de onde se conclui que a função f atinge um mínimo em c.

5.

a) A Maria obtém 7 pontos na sua jogada se obtiver 7 pontos no primeiro lançamento ou se obtiver menos de 7 pontos no primeiro lançamento e obtiver 7 pontos no segundo lançamento.

A probabilidade pedida é $\frac{6}{36}+\frac{15}{36}\times\frac{6}{36}=\frac{17}{72}$.

b) Consideremos os acontecimentos:

A: «a soma dos pontos dos dados é igual a 7»;

B: «o número do dado verde é superior ao do dado branco».

Pretende-se obter $P(A\mid B)$.

$$P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{3}{36}}{\frac{15}{36}}=\frac{1}{5}$$

c) O António perde o jogo se e só se obtiver 2 ou 3 pontos no primeiro lançamento e 2 pontos no segundo.

A probabilidade pedida é dada por $\frac{3}{36}\times\frac{1}{36}=\frac{1}{432}$.