5+5

Teste 1

CÁLCULO COMBINATÓRIO. PROBABILIDADES

Proposta de resolução

Grupo I

1. $^{5}A_{3} \times 6! = 43\,200$ **Resposta (C)**

2. $\frac{^{1000}A_{99}}{99!} + {}^{1000}C_{100} = {}^{1000}C_{99} + {}^{1000}C_{100} = {}^{1000}C_{100} = {}^{1000}C_{901}$ **Resposta (D)**

3. A linha do triângulo de Pascal que tem vinte elementos é a linha que contém os elementos da forma $^{19}C_{k}$. A soma de todos os elementos dessa linha é 2^{19} . A soma dos primeiros dez elementos dessa linha é metade desse valor, ou seja, é 2^{18} . **Resposta (C)**

4. Os termos do desenvolvimento de $(x+2)^8$ são da forma $^{8}C_{k} \cdot x^{8-k} \cdot 2^{k}$.
Tem-se, portanto, $8-k=5$, donde vem $k=3$.
Então, $^{8}C_{k} \cdot x^{8-k} \cdot 2^{k} = {}^{8}C_{3} \cdot x^{8-3} \cdot 2^{3} = 56 \cdot x^{5} \cdot 8 = 448x^{5}$. **Resposta (D)**

5. Existem duas hipóteses em alternativa: a imagem de 1 é 2; a imagem de 1 não é 2.
Vem, então, que o valor pedido é $1 \times 8 \times 7 + 7 \times 7 \times 7 = 399$. **Resposta (B)**

Grupo II

1.

a) $^{9}A_{6} = 60\,480$

b) $^{6}C_{2} \times 8^{4} = 61\,440$

c) $9 \times {}^{6}C_{2} \times {}^{8}A_{4} = 226\,800$

2.

a) Número de casos possíveis: $^{6}C_{2} = 15$
Número de casos favoráveis: $^{6}C_{2} - {}^{4}C_{2} = 9$
Probabilidade pedida: $\frac{9}{15} = \frac{3}{5}$

b) Número de casos possíveis: $^{6}C_{3} = 20$
Número de casos favoráveis: $2 \times {}^{4}C_{3} = 8$
Probabilidade pedida: $\frac{8}{20} = \frac{2}{5}$

c) Considerando o acontecimento contrário (ambos pensarem em consoantes), tem-se:
Número de casos possíveis: $6 \times 6 = 36$
Número de casos favoráveis: $4 \times 4 = 16$
Portanto, a probabilidade pedida é: $1 - \frac{16}{36} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$

3.

a) Se os acontecimentos A e B fossem incompatíveis, ter-se-ia:

$P(A \cup B) = P(A) + (B) = \frac{7}{12} + \frac{1}{2} = \frac{13}{12}$

Ora, como a probabilidade de um acontecimento não pode ser superior a 1, conclui-se que os acontecimentos A e B não são incompatíveis.

b) $P(B \mid A) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow P(B \cap A) = \frac{1}{3} \times P(A) \Leftrightarrow P(B \cap A) = \frac{1}{3} \times \frac{7}{12} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(B \cap A) = \frac{7}{36}$

Dado que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(B \cap A)$, pode concluir-se que:
$P(A \cup B) = \frac{7}{12} + \frac{1}{2} - \frac{7}{36} = \frac{32}{36} = \frac{8}{9}$

4. Designemos por E e F os acontecimentos:

E : «o atleta escolhido é estrangeiro»;

F : «o atleta escolhido é do sexo feminino».

Tem-se que:

- 90% dos atletas participantes no encontro são portugueses ou do sexo masculino, ou seja, $P(\overline{E} \cup \overline{F}) = 0{,}9$;
- metade dos atletas estrangeiros são do sexo feminino, ou seja, $P(F \mid E) = 0{,}5$.
  Pretende-se saber $P(E)$.

Tem-se:

$P(\overline{E} \cup \overline{F}) = 0{,}9 \Leftrightarrow P(\overline{E \cap F}) = 0{,}9 \Leftrightarrow 1 - P(E \cap F) = 0{,}9 \Leftrightarrow P(E \cap F) = 0{,}1$

$P(F \mid E) = 0{,}5 \Leftrightarrow \frac{P(E \cap F)}{P(E)} = 0{,}5 \Leftrightarrow \frac{0{,}1}{P(E)} = 0{,}5 \Leftrightarrow P(E) = \frac{1}{5}$

5. Sejam, respetivamente, x e y o número de cartas do naipe de espadas e o número de cartas do naipe de copas que foram introduzidas inicialmente no saco.

Tem-se:

$P(A) = \frac{3}{8} \Leftrightarrow \frac{x}{x+y} = \frac{3}{8}$ e $P(B \mid A) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{x-1}{x+y-1} = \frac{1}{3}$

Ora,

$$\begin{cases} \frac{x}{x+y} = \frac{3}{8} \\ \frac{x-1}{x+y-1} = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x = 3x + 3y \\ 3x - 3 = x + y - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 3y \\ y = 2x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 3(2x - 2) \\ y = 2x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 10 \end{cases}$$

Logo, no saco foram colocadas 6 cartas de espadas e 10 de copas.
Relativamente à experiência «tirar, sucessivamente e ao acaso, as cartas do saco e dispô-las numa mesa, umas ao lado das outras, pela ordem de saída», sejam E e C os acontecimentos:

E : «as cartas do naipe de espadas ficam juntas»;

C : «as cartas do naipe de copas ficam juntas».

Pretende-se determinar $P(E \cup C)$.

Tem-se:

$P(E \cup C) = P(E) + P(C) - P(E \cap C) = \frac{11! \times 6!}{16!} + \frac{7! \times 10!}{16!} - \frac{2 \times 6! \times 10!}{16!} \approx 0{,}002$