Prova-modelo de Exame

Nome ____ **N.º** ____ **Turma** _____ **Data** ____ /maio/2019

Avaliação ____ **Professor** ___________________________

Duração da Prova (Caderno 1 + Caderno 2): 150 minutos | **Tolerância:** 30 minutos

---

A prova é constituída por dois cadernos (Caderno 1 e Caderno 2).

Para a resolução do Caderno 1, é necessário o uso de calculadora gráfica. Para a resolução do Caderno 2, não é permitido o uso de calculadora.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro e transferidor.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Para cada resposta, identifique o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: Semiperímetro $\times$ Apótema

Área de um setor circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi\, r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ Área da base $\times$ Altura

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ Área da base $\times$ Altura

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n) :

Progressão aritmética: $\frac{u_1+u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}\,(a+b) = \operatorname{sen} a\,\cos b + \operatorname{sen} b\,\cos a$

$\cos\,(a+b) = \cos a\,\cos b - \operatorname{sen} a\,\operatorname{sen} b$

$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$ ou $\left(\rho e^{i\theta}\right)^n = \rho^n\, e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$ ou $\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)}$

($k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$)

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1(x_1-\mu)^2 + \ldots + p_n(x_n-\mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

Caderno 1: 75 minutos. Tolerância: 15 minutos.

É permitido o uso de calculadora.

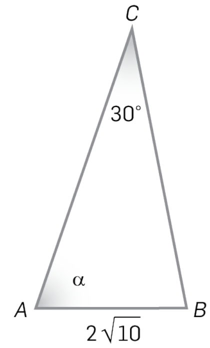
1. Na figura ao lado está representado o triângulo $[ABC]$.

Designou-se por α a amplitude do ângulo BAC.

Sabe-se que:

- $\overline{AB} = 2\sqrt{10}$
- $A\hat{C}B = 30°$
- $\text{tg}\,\alpha = 3$

Qual é o comprimento do segmento de reta $[BC]$?

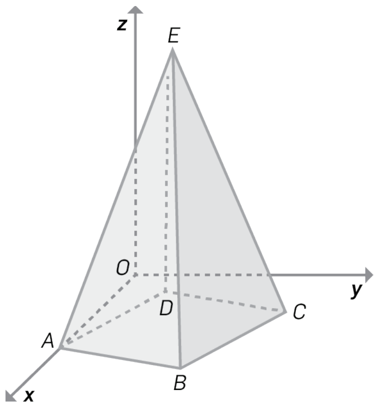


(A) 10 **(B)** 11 **(C)** 12 **(D)** 13

2. Na figura ao lado está representada, em referencial o.n. $Oxyz$, a pirâmide quadrangular regular $[ABCDE]$, cuja base está contida no plano xOy .

Sabe-se que:

- o vértice A pertence ao eixo Ox ;
- uma equação do plano ADE é $6x + 18y - 5z = 24$;
- o ponto E pertence à reta r , de equação vetorial $(x, y, z) = (5, -4, 2) + k(-1, 3, 2), k \in \mathbb{R}$.



2.1 Sejam F e G os pontos da reta r cujas cotas são, respetivamente, -2 e 4. Determina a amplitude, em graus, do ângulo FOG . Apresenta o resultado arredondado às unidades.

2.2 Determina o volume da pirâmide.

2.3 Considera o prisma quadrangular regular em que uma das bases coincide com a base da pirâmide e a outra base tem por centro o ponto E. Seja α o plano que passa no ponto E e é paralelo à face lateral do prisma que contém o segmento de reta $[AB]$.

Ao acaso, escolhe-se um vértice em cada base do prisma. Qual é a probabilidade de a reta definida pelos dois pontos escolhidos ser paralela ao plano α ? Apresenta o resultado na forma de fração irredutível.

3. Uma turma de uma escola secundária tem 30 alunos. A Rita é a delegada e o Pedro é o subdelegado dessa turma.

O professor de Matemática vai escolher um grupo de seis alunos para realizar um trabalho, mas pretende que a Rita e o Pedro não façam simultaneamente parte do grupo escolhido.

Nestas condições, quantas comissões diferentes podem ser formadas?

(A) $526\,600$ **(B)** $534\,400$ **(C)** $547\,700$ **(D)** $573\,300$

4. No baile de finalistas de uma escola estão presentes várias pessoas do sexo masculino (alunos e professores).

Sabe-se que:

- $\frac{4}{5}$ dessas pessoas são alunos (os restantes são professores);
- $\frac{2}{3}$ dessas pessoas vão de gravata (os restantes vão de laço).

Sabe-se também que $\frac{3}{4}$ dos alunos vão de gravata.

Entre todos os participantes do sexo masculino, escolhe-se um, ao acaso, para receber uma caneta oferecida pela organização.

Qual é a probabilidade de ser escolhido um professor que vai de laço?

Na tua resposta:

- designa por A o acontecimento «ser aluno» e por G o acontecimento «ir de gravata»;
- apresenta o resultado na forma de fração irredutível.

5. Um paraquedista salta de um avião. Ao fim de algum tempo, o paraquedas abre. Admite que a distância, em metros, a que o paraquedista se encontra do solo, t segundos após a abertura do paraquedas, é dada por:

$$d(t) = 930 - 6t + 24e^{-1,7t}$$

No instante da abertura do paraquedas, o paraquedista está a uma certa distância do solo. Determina, recorrendo à calculadora gráfica, quanto tempo demora o paraquedista a percorrer um terço dessa distância (desde o instante em que se dá a abertura do paraquedas).

Na tua resposta:

- equaciona o problema;
- reproduz, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que te permite(m) resolver a equação;
- apresenta o valor pedido arredondado às unidades.

6. Seja z um número complexo cujo afixo pertence à circunferência de centro na origem do referencial e raio $\sqrt{3}$. Seja $w = |z|^2 + z - \overline{z}$.

Sabe-se que $\mathrm{Re}(w) \times \mathrm{Im}(w) = 9$.

Qual é a parte imaginária do número complexo z ?

(A) $\frac{2}{3}$ **(B)** $\frac{3}{2}$ **(C)** $\frac{3}{4}$ **(D)** $\frac{4}{3}$

7. De uma progressão aritmética (u_n) sabe-se que a razão é $-\frac{2}{3}$ e que, para um certo número natural m, maior do que 1, se tem $u_1 + u_m = 20$ e $\sum_{k=1}^{m} u_k = 220$.

Verifica que -203 é termo da sucessão (u_n) e indica a sua ordem.

8. Considera, em referencial o.n. xOy, o paralelogramo $[ABCD]$ em que o segmento de reta $[AC]$ é uma das diagonais. Seja E o ponto de interseção das diagonais do paralelogramo.

Sabe-se que:

- o vetor $\overrightarrow{AE}$ tem coordenadas $(4, 3)$;
- o vetor $\overrightarrow{CB}$ tem coordenadas $(-5, 2)$;
- o ponto C tem coordenadas $(7, 10)$.

Quais são as coordenadas do ponto D ?

(A) $(4, 1)$ **(B)** $(4, 2)$ **(C)** $(6, 1)$ **(D)** $(6, 2)$

FIM DO CADERNO 1

Caderno 2: 75 minutos. Tolerância: 15 minutos.

Não é permitido o uso de calculadora.

9. Considera, em referencial o.n. xOy , uma elipse centrada no ponto O e cujos focos pertencem ao eixo Ox .

Seja F o foco de abcissa positiva.

A elipse interseta o eixo Ox em dois pontos. Seja A o que tem abcissa positiva.

Sabe-se que:

- F é o ponto médio do segmento de reta $[OA]$;
- o ponto de coordenadas $(-2, 3)$ pertence à elipse.

Qual é a abcissa do ponto A ?

(A) 2 **(B)** 3 **(C)** 4 **(D)** 5

10. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considera:

$z_1 = 4\left(\cos\frac{2\pi}{9} + i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{9}\right)$ $z_2 = \cos\frac{\pi}{18} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{18}$ $z_3 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\operatorname{sen}\frac{5\pi}{12}\right)$

Seja $w = -2 + \frac{z_1 \times \overline{z_2}}{2+(z_3)^3}$. Escreve, na forma trigonométrica, o número complexo w .

11. Seja $a = \lim\left(\frac{n^2-n}{n^2+n}\right)^{2n}$. Qual é o valor de $\ln(a)$?

(A) -2 **(B)** -3 **(C)** -4 **(D)** -5

12. Determina o conjunto dos números reais tais que: $2\log_3\left(\sqrt{3}x\right) \geq 3 + \log_3(x-2)$

Apresenta a tua resposta na forma de união de intervalos de números reais.

13. Seja f a função contínua, de domínio $\left]-\infty, \frac{3\pi}{2}\right]$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{kx} - (1+x)^2}{x} & \text{se } x < 0 \\ \operatorname{sen} x\,(1+\cos x) & \text{se } 0 \leq x \leq \dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$$

(k designa um número real positivo)

13.1 Qual é o valor de k ?

(A) 2 **(B)** 3 **(C)** 4 **(D)** 5

13.2 O gráfico da função f tem uma assíntota oblíqua. Determina a equação reduzida dessa assíntota.

13.3 Estuda a função f quanto à monotonia no intervalo $\left]0, \frac{3\pi}{2}\right]$ e determina, caso existam, os extremos relativos.

14. Considera, em referencial o.n. xOy , o gráfico da função g , de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por:

$g(x) = x\,(\ln x)^2$

Seja r a reta tangente ao gráfico da função g no ponto de abcissa $\frac{1}{e}$.

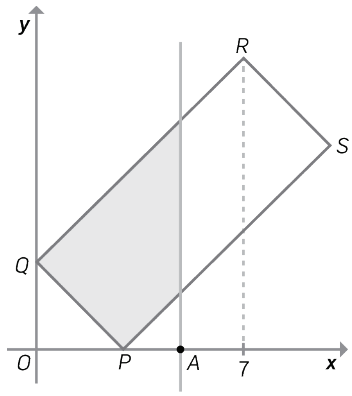
Seja B o ponto interseção da reta r com o eixo Oy .

Qual é a ordenada do ponto B ?

(A) $-\frac{2}{e}$ **(B)** $-\frac{1}{e}$ **(C)** $\frac{1}{e}$ **(D)** $\frac{2}{e}$

15. Na figura ao lado está representado, em referencial o.n. xOy , o retângulo $[PQRS]$, em que:

- o ponto P tem coordenadas $(3, 0)$;
- o ponto Q tem coordenadas $(0, 3)$;
- o ponto R tem abcissa 7.



Considera que um ponto A se desloca ao longo do eixo Ox , entre a origem O do referencial e o ponto de abcissa 7, sem coincidir com o ponto O . Para cada posição do ponto A , seja a a sua abcissa e seja $f(a)$ a área da região sombreada (interseção do retângulo com o semiplano definido pela condição $x \leq a$).

Define, por ramos, a função f .

FIM