Prova-modelo de Exame • maio/2019

Proposta de resolução

Caderno 1

1. **(C)**

De acordo com a lei dos senos, tem-se: $\frac{\text{sen}\,\alpha}{\overline{BC}} = \frac{\text{sen}\,30°}{2\sqrt{10}}$

Por outro lado, tem-se: $1+\text{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow 1+3^2 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{10} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{sen}^2\,\alpha = 1 - \frac{1}{10} \Leftrightarrow \text{sen}^2\,\alpha = \frac{9}{10}$ Como $\text{sen}\,\alpha > 0$, vem $\text{sen}\,\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$.

Portanto, $\frac{\frac{3}{\sqrt{10}}}{\overline{BC}} = \frac{\frac{1}{2}}{2\sqrt{10}}$ donde vem: $\overline{BC} = \frac{2\sqrt{10}\times\frac{3}{\sqrt{10}}}{\frac{1}{2}} = \frac{6}{\frac{1}{2}} = 12$

2.1 De acordo com o enunciado, uma equação vetorial da reta r é:
$(x,y,z) = (5,-4,2) + k(-1,3,2),\ k\in\mathbb{R}$

F é o ponto da reta r cuja cota é -2. Tem-se: $-2 = 2+2k \Leftrightarrow k = -2$

Assim, as coordenadas do ponto F são $(5,-4,2)-2(-1,3,2) = (7,-10,-2)$

G é o ponto da reta r cuja cota é 4. Tem-se: $4 = 2+2k \Leftrightarrow k = 1$

Assim, as coordenadas do ponto G são: $(5,-4,2)+(-1,3,2) = (4,-1,4)$

Seja α a amplitude do ângulo FOG .

Tem-se: $\overrightarrow{OF}\,.\,\overrightarrow{OG} = \left\|\overrightarrow{OF}\right\| \times \left\|\overrightarrow{OG}\right\| \times \cos\alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (7,-10,-2)\,.\,(4,-1,4) = \|(7,-10,-2)\| \times \|(4,-1,4)\| \times \cos\alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 28+10-8 = \sqrt{153}\times\sqrt{33}\times\cos\alpha \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{30}{\sqrt{5049}}$

Portanto, $\alpha \approx 65°$.

2.2 A altura da pirâmide é a cota do ponto E , ponto de interseção do plano ADE com a reta r .

Comecemos então por determinar as coordenadas do ponto E .

Tem-se: $(x,y,z) = (5,-4,2)+k(-1,3,2) \Leftrightarrow (x,y,z) = (5-k,-4+3k,2+2k)$

Como uma equação do plano ADE é $6x+18y-5z = 24$, vem:

$6(5-k)+18(-4+3k)-5(2+2k) = 24 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 30-6k-72+54k-10-10k = 24 \Leftrightarrow 38k = 76 \Leftrightarrow k = 2$

Portanto, o ponto E tem coordenadas $(5-2,\ -4+3\times 2, 2+2\times 2)$, ou seja, $(3,2,6)$.

A altura da pirâmide é, assim, igual a 6.

Por outro lado, o centro da base da pirâmide tem abcissa e ordenada iguais às do ponto E.

Assim, o centro da base da pirâmide tem coordenadas $(3,2,0)$.

A distância deste ponto ao ponto A é metade da diagonal da base.

Como o ponto A pertence ao eixo Ox, tem ordenada e cota iguais a zero.

Por outro lado, o ponto A pertence ao plano ADE, pelo que as suas coordenadas verificam a equação deste plano.

Tem-se, assim: $6x+18\times 0-5\times 0=24 \Leftrightarrow x=4$

Portanto, as coordenadas do ponto A são $(4,0,0)$.

Logo, a distância do centro da base ao ponto A é $\sqrt{(4-3)^2+(0-2)^2+(0-0)^2}=\sqrt{5}$.

Assim, a diagonal da base é $2\sqrt{5}$.

Como um quadrado é um losango, a área da base pode ser obtida aplicando a fórmula que dá a área de um losango (metade do produto das diagonais).

Portanto, a área da base da pirâmide é igual a $\frac{2\sqrt{5}\times 2\sqrt{5}}{2}$, ou seja, é igual a 10.

O volume da pirâmide é, assim, igual a $\frac{10\times 6}{3}=20$.

2.3 Designemos por A', B', C' e D' os vértices da base superior do prisma, de tal modo que $[AA']$, $[BB']$, $[CC']$ e $[DD']$ sejam as arestas laterais do prisma.

A experiência aleatória consiste na escolha, ao acaso, de um vértice em cada base do prisma.

Assim, o número de casos possíveis desta experiência é $4\times 4=16$.

Destes dezasseis casos possíveis, são favoráveis ao acontecimento «a reta definida pelos dois pontos escolhidos é paralela ao plano α» as seguintes escolhas: A e A', B e B', C e C', D e D', A e B', B e A', C e D', D e C'.

Há, portanto, 8 casos favoráveis.

Assim, a probabilidade pedida é $\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$.

3. **(D)**

Comecemos por observar que «a Rita e o Pedro não fazerem simultaneamente parte do grupo escolhido» é o contrário de «a Rita e o Pedro fazerem simultaneamente parte do grupo escolhido».

Assim, o número pedido é a diferença entre o número total de comissões e o número de comissões às quais pertencem a Rita e o Pedro.

O número total de comissões é o número de maneiras de escolher seis dos trinta alunos da turma, ou seja, é ${}^{30}C_6$.

O número de comissões às quais pertencem a Rita e o Pedro é o número de maneiras de escolher quatro dos restantes 28 alunos da turma, ou seja, é ${}^{28}C_4$.

Assim, o número pedido é ${}^{30}C_6 - {}^{28}C_4 = 573\,300$.

4. No universo das pessoas do sexo masculino presentes no baile, tem-se, de acordo com o enunciado:

- $\frac{4}{5}$ dessas pessoas são alunos, ou seja, $P(A) = \frac{4}{5}$;
- $\frac{2}{3}$ dessas pessoas vão de gravata, ou seja, $P(G) = \frac{2}{3}$.

É também referido que $\frac{3}{4}$ dos alunos vão de gravata, ou seja, $P(G|A) = \frac{3}{4}$.

É pedida a probabilidade de ser escolhido um professor que vai de laço, ou seja, é pedida a seguinte probabilidade: $P(\overline{A} \cap \overline{G})$

Tem-se: $P(\overline{A} \cap \overline{G}) = P(\overline{A \cup G}) = 1 - P(A \cup G) = 1 - [P(A) + P(G) - P(A \cap G)] =$

$= 1 - P(A) - P(G) + P(A \cap G) = 1 - P(A) - P(G) + P(A) \times P(G|A) =$

$= 1 - \frac{4}{5} - \frac{2}{3} + \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{2}{15}$

5. No instante da abertura do paraquedas, a distância, em metros, do paraquedista ao solo é igual a $d(0)$.

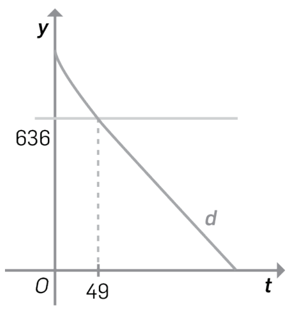
Tem-se $d(0) = 930 - 0 + 24\,e^0 = 954$.

Ora, um terço desta distância é $\frac{954}{3}$ metros, ou seja, é 318 metros.

Após ter percorrido 318 metros, o paraquedista está a $954 - 318$ metros do solo, ou seja, está a 636 metros do solo.

Uma equação que traduz o problema é, portanto, $d(t) = 636$.

Na figura ao lado está representado o gráfico da função d , bem como a reta de equação $y = 636$.



A abcissa, arredondada às unidades, do ponto de interseção destas duas linhas é 49.

Assim, a resposta ao problema é: 49 segundos.

6. **(B)**

Seja $z = x + yi$.

Como o afixo de z pertence à circunferência de centro na origem do referencial e raio $\sqrt{3}$, tem-se $|z| = \sqrt{3}$.

Portanto, tem-se: $w = 3 + x + yi - (x - yi) = 3 + 2yi$

Assim: $\text{Re}(w) \times \text{Im}(w) = 9 \Leftrightarrow 3 \times 2y = 9 \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}$

7. Tem-se: $\sum_{k=1}^{m} u_k = 220 \Leftrightarrow \frac{u_1+u_m}{2} \times m = 220 \Leftrightarrow \frac{20}{2} \times m = 220 \Leftrightarrow m = 22$

$u_1 + u_m = 20 \Leftrightarrow u_1 + u_{22} = 20 \Leftrightarrow u_1 + u_1 + 21r = 20 \Leftrightarrow 2u_1 + 21 \times \left(-\frac{2}{3}\right) = 20 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2u_1 - 14 = 20 \Leftrightarrow u_1 = 17$

$17 + (n-1) \times \left(-\frac{2}{3}\right) = -203 \Leftrightarrow (n-1) \times \left(-\frac{2}{3}\right) = -220 \Leftrightarrow n - 1 = 330 \Leftrightarrow n = 331$

-203 é o termo de ordem 331.

8. **(B)**
Tem-se: $D = A + \overrightarrow{AD} = A + \overrightarrow{BC} = A + (-\overrightarrow{CB})$
Notemos agora que o ponto E é o ponto médio do segmento de reta $[AC]$.
Portanto, tem-se: $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AE} = 2(4,3) = (8,6)$
Vem, então: $A = C + \overrightarrow{CA} = C + \left(-\overrightarrow{AC}\right) = (7,10) + (-8,-6) = (-1,4)$
Logo: $D = A + (-\overrightarrow{CB}) = (-1,4) + (5,-2) = (4,2)$

Outro processo:
Tem-se: $D = C + \overrightarrow{CD}$
Notemos agora que o ponto E é o ponto médio do segmento de reta $[AC]$.
Portanto, tem-se: $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AE} = 2(4,3) = (8,6)$
Vem, então: $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AC} + (-\overrightarrow{CB}) =$
$= (-8,-6) + (5,-2) = (-3,-8)$
Logo: $D = C + \overrightarrow{CD} = (7,10) + (-3,-8) = (4,2)$

Caderno 2

9. **(C)**

Seja a a abcissa do ponto A; a é, portanto, o semieixo maior da elipse.
Designemos o semieixo menor por b e a semidistância focal por c.
Como F é o ponto médio do segmento de reta $[OA]$, tem-se $c = \frac{a}{2}$.
Vem, então:
$a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow a^2 = b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Leftrightarrow b^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow b^2 = \frac{3\,a^2}{4}$

A equação reduzida da elipse é $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, ou seja, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\frac{3a^2}{4}} = 1$.

Como o ponto de coordenadas $(-2, 3)$ pertence à elipse, tem-se:

$\frac{(-2)^2}{a^2} + \frac{3^2}{\frac{3a^2}{4}} = 1 \Leftrightarrow \frac{4}{a^2} + \frac{12}{a^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{16}{a^2} = 1 \Leftrightarrow a^2 = 16$. Como $a > 0$, vem $a = 4$.

10. $w = -2 + \dfrac{4\,e^{i\frac{2\pi}{9}} \times \left(\overline{e^{i\frac{\pi}{18}}}\right)}{2 + \left(\sqrt{2}\,e^{i\frac{5\pi}{12}}\right)^3} = -2 + \dfrac{4\,e^{i\frac{2\pi}{9}} \times e^{-i\frac{\pi}{18}}}{2 + 2\sqrt{2}\,e^{i\frac{5\pi}{4}}} =$

$$= -2 + \frac{4\,e^{i\frac{\pi}{6}}}{2 + 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{5\pi}{4}\right)} = -2 + \frac{4\,e^{i\frac{\pi}{6}}}{2 + 2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,i\right)} = -2 + \frac{4\,e^{i\frac{\pi}{6}}}{2 - 2 - 2i} =$$

$$= -2 + \frac{4\,e^{i\frac{\pi}{6}}}{-2i} = -2 - \frac{2\,e^{i\frac{\pi}{6}}}{i} = -2 - \frac{2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{6}\right)}{i} =$$

$$= -2 - \frac{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,i\right)}{i} = -2 - \frac{\sqrt{3} + i}{i} = -2 - (\sqrt{3} + i) \times (-i) =$$

$$= -2 + \sqrt{3}\,i - 1 = -3 + \sqrt{3}\,i = 2\sqrt{3}\,e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

11. **(C)**

$a = \lim \left(\frac{n^2 - n}{n^2 + n}\right)^{2n} = \lim \left[\frac{n^2\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{n^2\left(1 + \frac{1}{n}\right)}\right]^{2n} = \lim \left[\left(\frac{1 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}}\right)^n\right]^2 =$

$$= \left[\lim \frac{\left(1 + \frac{-1}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}\right]^2 = \left(\frac{e^{-1}}{e}\right)^2 = \left(e^{-2}\right)^2 = e^{-4}$$

$\ln(a) = \ln(e^{-4}) = -4$

12. Uma vez que apenas os números positivos têm logaritmo, é necessário que $\sqrt{3}\,x > 0$ e que $x - 2 > 0$.

Ora: $\sqrt{3}\,x > 0 \ \wedge \ x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 0 \wedge x > 2 \Leftrightarrow x > 2$

Para $x > 2$, tem-se:

$$2\log_3\left(\sqrt{3}\,x\right) \geq 3 + \log_3(x-2) \Leftrightarrow \log_3\left[\left(\sqrt{3}\,x\right)^2\right] \geq \log_3(3^3) + \log_3(x-2) \Leftrightarrow$$

$$\log_3(3x^2) \geq \log_3[27(x-2)] \Leftrightarrow 3x^2 \geq 27(x-2) \Leftrightarrow x^2 \geq 9(x-2) \Leftrightarrow x^2 - 9x + 18 \geq 0$$

Cálculo auxiliar: $x^2 - 9x + 18 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 4\times 1\times 18}}{2} \Leftrightarrow x = 3 \vee x = 6$

Portanto: $x^2 - 9x + 18 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 3 \vee x \geq 6$

Tem-se: $x > 2 \wedge (x \leq 3 \vee x \geq 6) \Leftrightarrow x \in \,]2, 3] \cup [6, +\infty[$

Assim, o conjunto dos números reais tais que $2\log_3\left(\sqrt{3}\,x\right) \geq 3 + \log_3(x-2)$ é:
$]2, 3] \cup [6, +\infty[$

13.1 (A)

De acordo com o enunciado, a função f é contínua.
Portanto, a função f é contínua, em particular, no ponto 0.
Logo, tem-se que: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

Ora:

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \operatorname{sen} 0 \times (1 + \cos 0) = 0 \times 2 = 0$

- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{e^{kx} - (1+x)^2}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{e^{kx} - (1+2x+x^2)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{e^{kx} - 1 - 2x - x^2}{x} =$

$$= \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{e^{kx}-1}{x} - 2 - x\right) = -2 + \lim_{x\to 0^-}\frac{e^{kx}-1}{x} = -2 + \lim_{x\to 0^-}\frac{k\left(e^{kx}-1\right)}{kx} =$$

$$= -2 + k\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{kx}-1}{kx} \overset{y = kx}{=} -2 + k\lim_{y\to 0^-}\frac{e^y - 1}{y} = -2 + k\times 1 = k - 2$$

Tem-se, assim: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \Leftrightarrow k - 2 = 0 \Leftrightarrow k = 2$

13.2 Uma vez que o domínio da função é majorado, só existirá assíntota oblíqua ao gráfico da função f quando $x \to -\infty$.

Note-se também que, como $k > 0$, tem-se que kx tende para $-\infty$ quando x tende para $-\infty$.

Vem, então:

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{kx}-1-2x-x^2}{x^2} = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e^{kx}}{x^2} - \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} - 1\right) =$$

$$= \frac{e^{-\infty}}{+\infty} - \frac{1}{+\infty} - \frac{2}{-\infty} - 1 = \frac{0}{+\infty} - 0 - 0 - 1 = 0 - 0 - 0 - 1 = -1$$

$$b = \lim_{x\to-\infty}[f(x) - mx] = \lim_{x\to-\infty}[f(x) + x] = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e^{kx}-1-2x-x^2}{x} + x\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e^{kx}-1-2x-x^2+x^2}{x}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e^{kx}-1-2x}{x}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e^{kx}}{x} - \frac{1}{x} - 2\right) =$$

$$= \frac{0}{-\infty} - 0 - 2 = -2$$

Assim, a equação reduzida da assíntota oblíqua é: $y = -x - 2$

13.3 No intervalo $\left]0, \frac{3\pi}{2}\right[$, tem-se: $f'(x) = [\operatorname{sen} x\,(1+\cos x)]' =$

$$= \cos x(1+\cos x) + \operatorname{sen} x\,(-\operatorname{sen} x) = \cos x + \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \cos x + \cos(2x)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x + \cos(2x) = 0$$

Em $\mathbb{R}$, tem-se: $\cos x + \cos(2x) = 0 \Leftrightarrow \cos(2x) = -\cos x \Leftrightarrow \cos(2x) = \cos(\pi - x) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2x = \pi - x + 2k\pi \ \vee\ 2x = -\pi + x + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x = \pi + 2k\pi \ \vee\ x = -\pi + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \ \vee\ x = -\pi + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

Em $\left]0, \frac{3\pi}{2}\right[$, as soluções da equação $f'(x) = 0$ são $\frac{\pi}{3}$ e π.

Tem-se o seguinte quadro:

x	0	$\frac{\pi}{3}$		π		$\frac{3\pi}{2}$
f'	$+$	0	$-$	0	$-$	$-$
f	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$			Mín.

Portanto, a função é crescente em $\left]0, \frac{\pi}{3}\right]$ e é decrescente em $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

A função tem um máximo relativo para $x = \frac{\pi}{3}$ e um mínimo relativo para $x = \frac{3\pi}{2}$.

Tem-se: $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} \times \left(1 + \cos\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} \times \left(1 + \cos\frac{3\pi}{2}\right) = -1 \times (1+0) = -1$

14. **(D)**

Tem-se: $g'(x) = (\ln x)^2 + x \times 2 \times \ln x \times \frac{1}{x} = (\ln x)^2 + 2\ln x$

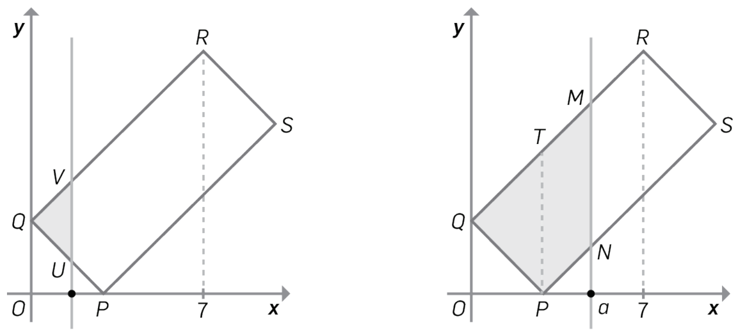
Portanto: $g'\left(\frac{1}{e}\right) = \left(\ln\left(\frac{1}{e}\right)\right)^2 + 2\ln\left(\frac{1}{e}\right) = (-1)^2 + 2 \times (-1) = -1$

Logo, a reta r tem equação reduzida da forma $y = -x + b$.

Como $g\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \times \left(\ln\left(\frac{1}{e}\right)\right)^2 = \frac{1}{e}$, vem: $\frac{1}{e} = -\frac{1}{e} + b \Leftrightarrow b = \frac{2}{e}$

15. Tal como se mostra nas figuras abaixo, tem-se:

- se $0 < a \leq 3$, a área da região sombreada é a área de um triângulo;
- se $3 < a \leq 7$, a área da região sombreada é a soma da área de um triângulo com a área de um paralelogramo.



Tendo em vista o cálculo da área do triângulo $[QUV]$, para cada a pertencente ao intervalo $]0, 3]$, comecemos por determinar as equações reduzidas das retas QP e QR .

Tem-se $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (0,3) - (3,0) = (-3,3)$, pelo que a reta QP tem declive -1 .

Como a ordenada na origem desta reta é igual a 3, tem-se que a equação reduzida da reta QP é $y = -x + 3$.

A reta QR é perpendicular à reta QP , pelo que tem declive 1. Como a ordenada na origem da reta QR também é igual a 3, tem-se que a equação reduzida desta reta é $y = x + 3$.

Assim, para cada a pertencente ao intervalo $]0, 3]$, tem-se:

$\overline{UV} = a + 3 - (-a + 3) = a + 3 + a - 3 = 2a$

A área do triângulo $[QUV]$ é, portanto, $\frac{2a \times a}{2} = a^2$.

Para $a = 3$, obtemos a área do triângulo $[PQT]$: $3^2 = 9$

Determinemos agora a área do paralelogramo $[PTMN]$.

A base é $\overline{PT}$. Como o ponto T pertence à reta QR , cuja equação reduzida é $y = x + 3$, tem-se $\overline{PT} = 3 + 3 = 6$.

Para cada a pertencente ao intervalo $]3,7]$, a altura do paralelogramo é $a - 3$.

Assim, a área do paralelogramo é $6(a-3) = 6a - 18$.

Portanto, para cada a pertencente ao intervalo $]3,7]$, a área da região sombreada é $9 + 6a - 18 = 6a - 9$.

Logo, f é a função de domínio $]0,7]$ definida por: $f(a) = \begin{cases} a^2 & \text{se } 0 < a \leq 3 \\ 6a - 9 & \text{se } 3 < a \leq 7 \end{cases}$