**Teste de Matemática A**

2019 / 2020

Teste N.º 2

**Matemática A**

Duração do Teste: 90 minutos

**12.º Ano de Escolaridade**

Nome do aluno: ________________________________________ N.º: __ Turma: ___

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Em caso de engano, deve riscar de forma inequívoca aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva de forma legível a numeração dos itens, bem como as respetivas respostas. As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

O teste inclui um formulário.

As cotações encontram-se no final do enunciado da prova.

Para responder aos itens de escolha múltipla, não apresente cálculos nem justificações e escreva na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Na resposta aos itens de resposta aberta, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

# Formulário

## Geometria

**Comprimento de um arco de circunferência**

$\alpha r$ ($\alpha$ − amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; $r$ − raio)

**Área de um polígono regular**: Semiperímetro × Apótema

**Área de um setor circular:**

$\frac{\alpha r^2}{2}$ ($\alpha$ − amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; $r$ − raio)

**Área lateral de um cone:** $\pi r g$ ($r$ − raio da base; $g$ − geratriz)

**Área de uma superfície esférica:** $4\pi r^2$ ($r$ − raio)

**Volume de uma pirâmide:** $\frac{1}{3}$ × Área da base × Altura

**Volume de um cone:** $\frac{1}{3}$ × Área da base × Altura

**Volume de uma esfera:** $\frac{4}{3}\pi r^3$ ($r$ − raio)

## Progressões

Soma dos $n$ primeiros termos de uma progressão $(u_n)$

**Progressão aritmética:** $\frac{u_1+u_n}{2}\times n$

**Progressão geométrica:** $u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$

## Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

## Complexos

$\left(\rho e^{i\theta}\right)^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$ $\quad (k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

## Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \, (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

## Limites notáveis

$\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \, (p \in \mathbb{R})$

1. Sejam $E$ um conjunto finito, não vazio, e $P$ uma probabilidade no conjunto $\mathcal{P}(E)$. Sejam $A$ e $B$ dois acontecimentos em $E$.

Sabe-se que:

- $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = \frac{3}{5}$
- $P(A|B) = \frac{2}{3}$

Qual é o valor de $P(B \backslash A)$?

**(A)** 0,1 **(B)** 0,2 **(C)** 0,3 **(D)** 0,4

2. A Raquel convidou o namorado e as três amigas, Alice, Beatriz e Carolina, para tomarem café em sua casa.

**2.1.** De quantas maneiras se podem dispor lado a lado e em linha reta os cinco amigos, para tirarem uma fotografia, se a Raquel e o namorado não ficarem juntos?

**2.2.** A Raquel tem dezasseis cápsulas de café indistinguíveis ao tato, das quais oito são pretas, cinco são douradas, duas são verdes e uma é roxa.

**2.2.1.** A Raquel vai colocar aleatoriamente as dezasseis cápsulas numa caixa quadrada com dezasseis compartimentos, não mais do que uma por compartimento.

Determine a probabilidade de uma coluna ficar ocupada só com cápsulas douradas. Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

**2.2.2.** A Raquel vai escolher aleatoriamente cinco cápsulas de café, para fazer cinco cafés para si e para os seus convidados.

Sejam $A$, $B$ e $C$ os acontecimentos seguintes:

$A$: "A Raquel escolhe uma cápsula roxa."

$B$: "A Raquel escolhe todas as cápsulas verdes."

$C$: "A Raquel escolhe todas as cápsulas da mesma cor."

Elabore uma composição na qual indique o valor de $P(A \cap B|\bar{C})$, sem aplicar a fórmula da probabilidade condicionada.

Na sua resposta, deve:

- explicar o significado de $P(A \cap B|\bar{C})$, no contexto da situação descrita;
- fazer referência à regra de Laplace;
- explicar o número de casos possíveis;
- explicar o número de casos favoráveis;
- apresentar o valor de $P(A \cap B|\bar{C})$ na forma de fração irredutível.

**3.** Considere o desenvolvimento de $\left(2\sqrt{x}+\frac{k}{x}\right)^6$, com $x > 0$ e $k$ constante positiva.

Sabe-se que o termo independente é igual a $3840$.

Determine o valor de $k$.

**4.** Uma equipa de voleibol feminino tem atletas de 7.º, 8.º e 9.º anos.

Relativamente às atletas desta equipa, sabe-se que:

- $\frac{2}{5}$ das atletas que frequentam o 9.º ano têm uma altura superior a $1{,}7$ metros;
- $\frac{11}{21}$ das atletas têm uma altura superior a $1{,}7$ metros;
- $\frac{2}{7}$ das atletas frequentam o 9.º ano e têm uma altura superior a $1{,}7$ metros.

Escolhe-se, ao acaso, uma atleta dessa equipa.

Determine a probabilidade de a atleta escolhida ter uma altura inferior ou igual a $1{,}7$ metros, sabendo que não frequenta o 9.º ano.

Apresente o resultado na forma de dízima, arredondado às centésimas.

**5.** O décimo terceiro e o vigésimo elementos de uma linha do triângulo de Pascal são iguais.

O elemento central da linha seguinte é:

**(A)** ${}^{32}C_{16}$ **(B)** ${}^{32}C_{15}$ **(C)** ${}^{31}C_{16}$ **(D)** ${}^{31}C_{15}$

**6.** Sejam $E$ um conjunto finito, não vazio, e $P$ uma probabilidade no conjunto $\mathcal{P}(E)$.

Sejam $A$, $B$ e $C$ acontecimentos em $E$ tais que nem $B$ nem $C$ são o acontecimento impossível, $C$ não é o acontecimento certo e os acontecimentos $B$ e $C$ são acontecimentos independentes.

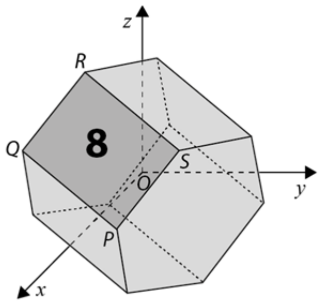
Prove que $P\big(A \mid (B \cap C)\big) \times P(C) + P\big(A \mid (B \cap \overline{C})\big) \times P(\overline{C}) = P(A \mid B)$.

**7.** O dono de uma pizaria orgulha-se no seu cartaz publicitário de, com apenas dez ingredientes, conseguir fazer exatamente $n$ pizas diferentes, com pelo menos três ingredientes diferentes cada uma.

Para a afirmação de o dono da pizaria ser verdadeira, qual é o valor de $n$?

**(A)** $120$ **(B)** $968$ **(C)** $1013$ **(D)** $1024$

**8.** Na figura está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um prisma hexagonal regular com uma das faces laterais numerada com o número 8.




**8.1.** Escolhem-se, ao acaso, dois vértices do prisma. Qual é a probabilidade de esses vértices formarem um segmento de reta perpendicular às bases do prisma?

**(A)** $\frac{1}{11}$ **(B)** $\frac{1}{12}$ **(C)** $\frac{2}{11}$ **(D)** $\frac{1}{2}$

**8.2.** Considere agora que se pretende numerar as sete faces do prisma não numeradas, utilizando os algarismos de 1 a 7 e colocando um algarismo diferente em cada face.
De quantas maneiras o poderemos fazer de forma que:

**8.2.1.** nas bases do prisma fiquem apenas números primos?

**8.2.2.** a soma dos algarismos colocados nas faces laterais seja par?

**8.3.** Dispõe-se de $n$ cores diferentes $(n \geq 7)$ para colorir todas as faces do prisma.
Qual é a probabilidade de, ao colorir cada face do prisma com uma única cor, exatamente duas faces sejam pintadas da mesma cor e as restantes faces do prisma sejam pintadas com cores diferentes entre si?

**(A)** $\frac{{}^8C_2 \times 2! \times {}^{n-1}A_6}{n^8}$

**(B)** $\frac{{}^8C_2 \times n \times {}^{n-1}A_6}{{}^nA_8}$

**(C)** $\frac{{}^8C_2 \times n \times {}^{n-1}A_6}{{}^nA'_8}$

**(D)** $\frac{{}^8C_2 \times n \times {}^{n-1}A_6 \times 8!}{n^8}$

**FIM**

## COTAÇÕES

<table>
<tr><th colspan="14">Item</th></tr>
<tr><th colspan="14">Cotação (em pontos)</th></tr>
<tr><th>1.</th><th>2.1.</th><th>2.2.1</th><th>2.2.2</th><th>3.</th><th>4.</th><th>5.</th><th>6.</th><th>7.</th><th>8.1.</th><th>8.2.1</th><th>8.2.2</th><th>8.3.</th><th>Total</th></tr>
<tr><td>8</td><td>20</td><td>20</td><td>20</td><td>20</td><td>20</td><td>8</td><td>20</td><td>8</td><td>8</td><td>20</td><td>20</td><td>8</td><td>200</td></tr>
</table>