Teste de Matemática A

2019 / 2020

Teste N.º 1

Matemática A

Duração do Teste (Caderno 1+ Caderno 2): 90 minutos

12.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: ____ N.º: __ Turma: ___

Este teste é constituído por **dois** cadernos:

- Caderno 1 – com recurso à calculadora;
- Caderno 2 – sem recurso à calculadora.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Em caso de engano, deve riscar de forma inequívoca aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva de forma legível a numeração dos itens, bem como as respetivas respostas. As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

O teste inclui um formulário.

As cotações encontram-se no final do enunciado da prova.

Para responder aos itens de escolha múltipla, não apresente cálculos nem justificações e escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Na resposta aos itens de resposta aberta, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: Semiperímetro $\times$ Apótema

Área de um setor circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ Área da base $\times$ Altura

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ Área da base $\times$ Altura

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n)

Progressão aritmética: $\frac{u_1+u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a\, \cos b + \operatorname{sen} b\, \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a\, \cos b - \operatorname{sen} a\, \operatorname{sen} b$

$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2\, b\, c \cos A$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$ ou $\left(re^{i\theta}\right)^n = r^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$ ou $\sqrt[n]{r e^{i\theta}} = \sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}$

($k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$)

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1(x_1-\mu)^2 + \ldots + p_n(x_n-\mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u'.v + u.v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.v - u.v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,.u^{n-1}.u' \ (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u'.\cos u$

$(\cos u)' = -u'.\operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'.e^u$

$(a^u)' = u'.a^u.\ln a \ (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u\,.\ln a} \ (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \ (n \in \mathbb{N})$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \ (p \in \mathbb{R})$

CADERNO 1: 45 MINUTOS

É PERMITIDO O USO DA CALCULADORA.

1. Um baralho de cartas completo é constituído por 52 cartas, repartidas por quatro naipes (espadas, copas, ouros e paus).

Em cada naipe há 13 cartas: um ás, três figuras (rei, dama e valete) e mais nove cartas (do dois ao dez).

1.1. Utilizando apenas as doze figuras, quantas sequências de 12 cartas, com as figuras do mesmo naipe todas juntas, é possível construir?

1.2. Retirando ao acaso, simultaneamente, cinco cartas de um baralho completo, de quantas maneiras é possível obter pelo menos dois ases?

1.3. Considere apenas as nove cartas, do dois ao dez, do naipe de ouros.

Retiram-se, simultaneamente e ao acaso, seis dessas cartas.

Determine a probabilidade de o menor dos números saídos ser 3 e o maior ser 9.

Apresente o resultado sob a forma de fração irredutível.

2. Considere todos os números naturais de sete algarismos que se podem escrever utilizando um algarismo 0, dois algarismos 4, três algarismos 5 e um algarismo 7.

Determine quantos destes números são pares.

3. A soma dos três últimos elementos de uma linha do triângulo de Pascal é 191.

O terceiro elemento da linha seguinte é:

(A) 189 **(B)** 190 **(C)** 191 **(D)** 192

4. Considere o desenvolvimento de $(2-kx)^5$, com $k \in \mathbb{R}$.

Sabendo que o coeficiente do termo em x^3 é igual a -1080, determine o valor da constante k.

5. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos equiprováveis e independentes.

Sabe-se que $P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cup \overline{B}) = \frac{9}{8}$.

Qual é o valor de $P(B)$?

(A) $\frac{1}{4}$ **(B)** $\frac{3}{4}$ **(C)** $\frac{1}{3}$ **(D)** $\frac{2}{3}$

FIM DO CADERNO 1

COTAÇÕES (Caderno 1)

Item							
Cotação (em pontos)							
1.1.	**1.2.**	**1.3.**	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	
15	15	15	15	8	20	8	96

CADERNO 2: 45 MINUTOS

NÃO É PERMITIDO O USO DA CALCULADORA.

6. Considere n pontos pertencentes a uma circunferência $(n \geq 3)$.

O número de polígonos convexos que podem ser definidos por esses pontos é dado por:

(A) 2^n **(B)** $2^n - 1$ **(C)** $2^n - 1 - n$ **(D)** $2^n - 1 - n - \frac{n^2-n}{2}$

7. Pretende-se pintar um painel publicitário com n listas verticais coloridas, utilizando-se para o efeito p cores. Sabendo que listas consecutivas não podem ter a mesma cor, de quantas maneiras diferentes se pode pintar o painel para todos os casos possíveis de n e p?

(A) $(n-1)^{p-1}$ **(B)** $p \times (p-1)^{n-1}$ **(C)** ${}^{n}A'_{p}$ **(D)** ${}^{p}A'_{n}$

8. Considere o seguinte problema:

O departamento de Matemática de uma determinada escola tem quinze professores e pretende formar uma comissão de quatro professores para representar a escola num congresso internacional. O António e a Susana, que são casados, combinaram que não fariam parte da comissão juntos. Quantas são as comissões diferentes que se podem constituir nestas condições?

${}^{15}C_4 - {}^{13}C_2$ e ${}^{13}C_4 + 2 \times {}^{13}C_3$ são duas respostas corretas.

Numa pequena composição, explique o raciocínio que conduziu a cada uma das respostas.

9. Determine o valor natural n que satisfaz a igualdade:

$$\frac{(n+1)! - {}^{n}A_n}{(n-1)!} = 2019\ {}^{n}C_{n-1}$$

10. O Pedro, o Salvador e o Tiago juntaram-se com alguns amigos num convívio. Se n for o número de pessoas no convívio $(n > 3)$, de quantas maneiras se podem dispor lado a lado em linha reta os n amigos, se os três amigos, Pedro, Salvador e Tiago, não ficarem em lugares consecutivos?

(A) $3! \times (n-3)!$ **(B)** $3 \times (n-2)!$

(C) $(n-3)! \times (n^3 - 3n^2 - 4n)$ **(D)** $(n-2)! \times (n^2 - n - 6)$

11. Sejam E um conjunto finito, não vazio, e P uma probabilidade no conjunto $\mathcal{P}(E)$. Sejam A e B dois acontecimentos em E tais que $P(B) \neq 0$.

Prove que:

$$P(\overline{A}) - P(\overline{A \cup B}) - P(B) \times \left[1 - P\left(\left(\overline{\overline{A} \cup \overline{B}}\right) | \, B\right)\right] = 0$$

12. Na turma do João, alguns alunos pretendem candidatar-se ao curso de Matemática Aplicada.

Relativamente a essa turma, constatou-se que:

- o número de rapazes é o dobro do número de alunos que pretende candidatar-se ao curso de Matemática Aplicada;
- dois terços dos alunos que pretendem candidatar-se ao curso de Matemática Aplicada são rapazes;
- cinco em cada seis alunas não pretendem seguir o curso de Matemática Aplicada.

Escolhe-se, ao acaso, um aluno da turma.

Determine a probabilidade de esse aluno pretender candidatar-se ao curso de Matemática Aplicada.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

FIM DO CADERNO 2

COTAÇÕES (Caderno 2)

Item							
Cotação (em pontos)							
6.	**7.**	**8.**	**9.**	**10.**	**11.**	**12.**	
8	8	20	20	8	20	20	**104**