TESTE N.º 5 – Proposta de resolução

Caderno 1

1. Opção (B)

$$\underbrace{X \quad P \quad T \quad O}_{1\ \times 1\ \times 1\ \times 1} \times \underbrace{\_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_}_{{}^8C_3 \times {}^5C_2 \times 3!\ =\ 3360}$$

Depois de colocados o X, o P, o T e o O, existem ${}^8C_3$ maneiras de colocar os três E nos oito espaços disponíveis. Por cada uma destas maneiras, existem ${}^5C_2$ formas de colocar os dois 1 nos cinco lugares ainda disponíveis, sendo que, por cada uma das maneiras de colocar o X, o P, o T, o O, os três E e os dois 1, existem 3! formas de colocar o N, o 8 e o 9.

2. Opção (B)

Sabe-se que $P(A) > 0,\ \ P(B) > 0,\ \ P(A \cap B) = 0,\ \ P(A) = P(B)$ e $P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = 0{,}4$.

Assim:

$$\begin{aligned} P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = 0{,}4 \Leftrightarrow P\left(\overline{A \cup B}\right) = 0{,}4 &\Leftrightarrow P(A \cup B) = 1 - 0{,}4 \\ &\Leftrightarrow P(A \cup B) = 0{,}6 \\ &\Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}6 \\ &\Leftrightarrow P(B) + P(B) - 0 = 0{,}6 \\ &\Leftrightarrow P(B) = 0{,}3 \end{aligned}$$

Logo, $P\left(\overline{A} \cap B\right) = P(B) - P(A \cap B) = 0{,}3 - 0 = 0{,}3$.

3.

3.1. Sabemos que:

- f é contínua em $]-1, +\infty[$, logo, em particular, f é contínua em $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$;
- f é diferenciável em $]-1, +\infty[$, logo, em particular, f é diferenciável em $\left]-\frac{1}{2}, 0\right[$.

Assim, pelo teorema de Lagrange, pode concluir-se que $\exists c \in \left]-\frac{1}{2}, 0\right[: f'(c) = \frac{f(0) - f\left(-\frac{1}{2}\right)}{0 - \left(-\frac{1}{2}\right)}$, isto é,

$\exists c \in \left]-\frac{1}{2}, 0\right[: f'(c) = 2\left(f(0) - f\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$, como queríamos demonstrar.

3.2. $f'(x) = \frac{(\ln(3x+3))' \times (x+1) - \ln(3x+3) \times (x+1)'}{(x+1)^2} + 0 =$

$$= \frac{\frac{3}{3x+3} \times (x+1) - \ln(3x+3) \times 1}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{1 - \ln(3x+3)}{(x+1)^2}$$

$f'(x) = 0$

$1 - \ln(3x+3) = 0 \ \wedge \ (x+1)^2 \neq 0 \Leftrightarrow \ln(3x+3) = 1 \ \wedge \ x+1 \neq 0$

$\Leftrightarrow 3x + 3 = e \ \wedge \ x \neq -1$

$\Leftrightarrow x = \frac{e-3}{3}$

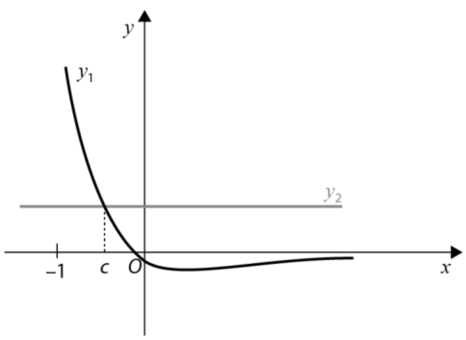
x	-1		$\frac{e-3}{3}$	$+\infty$
Sinal de f'	n.d.	$+$	0	$-$
Variação de f	n.d.	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$

f é crescente em $\left]-1, \frac{e-3}{3}\right]$ e é decrescente em $\left[\frac{e-3}{3}, +\infty\right[$; existe um máximo de f para $x = \frac{e-3}{3}$.

3.3. Comecemos por determinar as coordenadas do ponto A:

$y_1 = f'(x)$, isto é, $y_1 = \frac{1-\ln(3x+3)}{(x+1)^2}$.

$y_2 = 2\left(f(0) - f\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$, isto é, $y_2 = 2\left(\ln(3) + 5 - \frac{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}{\frac{1}{2}} - 5\right) = 2\left(\ln(3) - 2\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right)$.

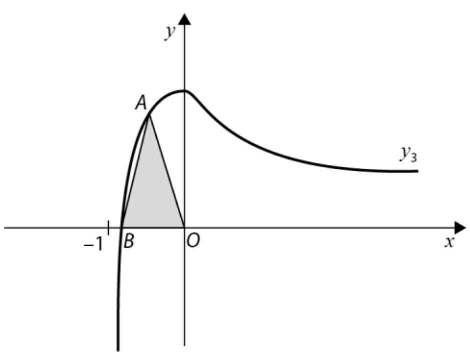


Assim, $c \approx -0,311$.

Logo, $A(-0,311; f(-0,311))$, isto é, $A(-0,311; 6,054)$.

De seguida, representemos graficamente a função f e determinemos as coordenadas do ponto B:

$$y_3 = \frac{\ln(3x+3)}{x+1} + 5$$



$B(-0,846; 0)$

$$A_{\Delta[OAB]} = \frac{\overline{OB} \times y_A}{2} = \frac{0,846 \times 6,054}{2} \approx 2,56 \text{ u. a.}$$

4.

4.1.

Cálculos auxiliares

(1) $z_2 = -\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) - i\text{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right) = -\left(\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + i\text{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right)\right) = -e^{i\frac{\pi}{7}} = e^{i\left(\pi+\frac{\pi}{7}\right)} = e^{i\left(\frac{8\pi}{7}\right)}$

Logo, $(z_2)^{14} = e^{i\left(\frac{8\pi}{7}\right)\times 14} = e^{i(16\pi)} = 1$.

(2) $i^{2019} = i^3 = -i$

$$\begin{array}{r|l} 2019 & 4 \\ \hline 3 & 504 \end{array}$$

$$\frac{z_1+(z_2)^{14}}{1-i^{2019}} = \frac{-1+3i+1}{1-(-i)} = \frac{3i}{1+i} =$$

$$= \frac{3i(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{3i-3i^2}{1-i^2} =$$

$$= \frac{3i+3}{2} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i$$

4.2. Seja $z = a + bi$ e $w = c + di$, onde a, b, c e $d \in \mathbb{R}$.

Assim:

$$\overline{z}\, w + z\, \overline{w} = (a - bi)(c + di) + (a + bi)(c - di) =$$

$$= ac + adi - bci - bdi^2 + ac - adi + bci - bdi^2 =$$

$$= 2ac + bd + bd =$$

$$= 2ac + 2bd \in \mathbb{R}$$

Caderno 2

5. Opção (C)

P é o ponto do gráfico de f de abcissa a, logo $P(a, f(a))$. Como $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = 0$, conclui-se que $f'(a) = 0$ e como $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)-f'(a)}{x-a} = -1$, conclui-se que $f''(a) = -1$.

Assim, como $f'(a) = 0$ e $f''(a) < 0$, podemos concluir que $f(a)$ é um máximo relativo da função f.

6.

6.1. f é contínua em $x = 0$ se e só se existir $\lim_{x\to 0} f(x)$, ou seja, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$.

Ora:

- $f(0) = k$
- $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x-1}{3x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \frac{1}{3}\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x-1}{x} = \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3}$

• $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{\operatorname{sen}(3x^2)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \to 0^-} \frac{\operatorname{sen}(3x^2)}{\operatorname{sen}^2 x} =$

$$= \lim_{x \to 0^-} \left(\frac{\operatorname{sen}(3x^2)}{3x^2} \times \frac{x}{\operatorname{sen}(x)} \times \frac{x}{\operatorname{sen}(x)} \times 3\right) =$$

$$= \lim_{3x^2 \to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(3x^2)}{3x^2} \times \frac{1}{\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}} \times \frac{1}{\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}} \times 3 =$$

$$= 1 \times \frac{1}{1} \times \frac{1}{1} \times 3 =$$

$$= 3$$

Visto que $\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$, conclui-se assim que não existe nenhum valor real de k para o qual a função f é contínua em $x = 0$.

6.2. Como f tem domínio $\left[-\frac{\pi}{2}, +\infty\right[$, apenas faz sentido estudar as assíntotas não verticais ao gráfico de f quando $x \to +\infty$.

Assim:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{e^x - 1}{3x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - 1}{3x^2} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{e^x}{3x^2} - \frac{1}{3x^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} - \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{3x^2} =$$

$$= \frac{1}{3} \times (+\infty) - 0 =$$

$$= +\infty \notin \mathbb{R}$$

Conclui-se, assim, que o gráfico de f não admite assíntotas não verticais.

6.3. Opção (C)

Em $]0, +\infty[$, $h(x) = f(x) \times 3x - x^2$. Logo, $h(x) = \frac{e^x - 1}{3x} \times 3x - x^2 = e^x - 1 - x^2$.

Assim, em $]0, +\infty[$, $h'(x) = e^x - 2x$ e $h''(x) = e^x - 2$.

$h''(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 2 = 0 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln(2)$

x	0		$\ln(2)$	$+\infty$
Sinal de h''	n.d.	$-$	0	$+$
Variação de h'	n.d.	$\searrow$	mín.	$\nearrow$

Seja r a reta tangente ao gráfico da função h que tem declive mínimo.

Tem-se que $h'(\ln(2)) = e^{\ln(2)} - 2\ln(2) = 2 - \ln(4)$ é o declive da reta r.

7. Seja g a função, de domínio $]-\pi,\pi[$, definida por $g(x)=2\cos x+\cos^2 x+5x$.Tem-se que:

$g'(x)=-2\operatorname{sen}x-2\cos x\operatorname{sen}x+5=-2\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}(2x)+5$

$g''(x)=-2\cos x-2\cos(2x)$

$$g''(x)=0\Leftrightarrow -2\cos x-2\cos(2x)=0\Leftrightarrow -\cos x=\cos(2x)$$
$$\Leftrightarrow \cos(\pi+x)=\cos(2x)$$
$$\Leftrightarrow \pi+x=2x+2k\pi \quad\vee\quad \pi+x=-2x+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow x=\pi+2k\pi \quad\vee\quad x=-\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}$$

Como $x\in\,]-\pi,\pi[$, $x=-\frac{\pi}{3}\;\vee\; x=\frac{\pi}{3}$

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{3}$		π
Sinal de g''	n.d.	+	0	–	0	+	n.d.
Sentido das concavidades do gráfico de g	n.d.	∪	P.I.	∩	P.I.	∪	n.d.

O gráfico de g tem a concavidade voltada para cima em $\left]-\pi,-\frac{\pi}{3}\right]$ e em $\left[\frac{\pi}{3},\pi\right[$ e a concavidade voltada para baixo em $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]$; tem dois pontos de inflexão de abcissas $x=-\frac{\pi}{3}$ e $x=\frac{\pi}{3}$.

8. $f'(0)=0$, pois, em $x=0$, a função f é diferenciável e apresenta um máximo.

Assim, $g(0)\times f'(0)=0$, pelo que a afirmação (I) é falsa.

$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{f(x)}=\frac{+\infty}{1}=+\infty$, logo o gráfico da função g não admite uma assíntota horizontal quando $x\to+\infty$ e a afirmação (II) é falsa.

$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{f(x)}=\frac{-\infty}{0^+}=-\infty$, logo o gráfico da função g não admite uma assíntota horizontal quando $x\to-\infty$ e a afirmação (III) é falsa.

A função f é contínua em $\mathbb{R}$ e não tem zeros, logo a função g é contínua em $\mathbb{R}$, por se tratar do quociente entre duas funções contínuas em $\mathbb{R}$, cujo denominador não se anula. Assim, o gráfico da função g não admite assíntotas verticais e a afirmação (IV) é a afirmação verdadeira.

9. Opção (D)

Sendo h um oscilador harmónico, $h(t)$ é da forma $h(t)=A\cos(\omega\pi+\varphi)$.

Por observação da representação gráfica, $A=4$, pois o máximo é 4 e o mínimo é -4 e $T=2$.

Como $T=\frac{2\pi}{\omega}$, vem que $2=\frac{2\pi}{\omega}\Leftrightarrow\omega=\pi$. Assim, $h(t)=4\cos(\pi t+\varphi)$, o que exclui as opções (A) e (C).

Como $h\left(\frac{1}{2}\right)=4$, exclui-se a opção (B), pois, nesta opção, $h\left(\frac{1}{2}\right)=4\cos\left(\pi\times\frac{1}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=4\cos\pi=-4$.

Na opção (D), $h\left(\frac{1}{2}\right)=4\cos\left(\pi\times\frac{1}{2}+\frac{3\pi}{2}\right)=4\cos(2\pi)=4$.