

Teste N.º 5

Matemática A

Duração do Teste (Caderno 1 + Caderno 2): 90 minutos

12.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: _____ N.º: ____ Turma: ____

Este teste é constituído por **dois** cadernos:

- Caderno 1 – com recurso à calculadora;
- Caderno 2 – sem recurso à calculadora.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Em caso de engano, deve riscar de forma inequívoca aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva de forma legível a numeração dos itens, bem como as respetivas respostas. As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

O teste inclui um formulário.

As cotações encontram-se no final do enunciado da prova.

Para responder aos itens de escolha múltipla, não apresente cálculos nem justificações e escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Na resposta aos itens de resposta aberta, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: Semiperímetro \times Apótema

Área de um setor circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base;

g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ Área da base \times Altura

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ Área da base \times Altura

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n)

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

Complexos

$$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis} (n\theta) \quad \text{ou} \quad (r e^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$$

$$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis} \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \quad \text{ou} \quad \sqrt[n]{r e^{i\theta}} = \sqrt[n]{r} e^{i \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right)}$$

$$(k \in \{0, \dots, n-1\} \text{ e } n \in \mathbb{N})$$

Probabilidades

$$\mu = p_1 x_1 + \dots + p_n x_n$$

$$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \dots + p_n (x_n - \mu)^2}$$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,6827$$

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$$

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,9973$$

Regras de derivação

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$(\sin u)' = u' \cdot \cos u$$

$$(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$$

$$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$(e^u)' = u' \cdot e^u$$

$$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

Limites notáveis

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$



CADERNO 1: 45 MINUTOS
É PERMITIDO O USO DA CALCULADORA.



1. Pretende-se formar códigos com os doze caracteres existentes em EXPOENTE1819.

Quantos desses códigos começam com a sigla XPTO?

- (A) 336 (B) 3360 (C) 6720 (D) 40 320

2. Sejam $(E, \mathcal{P}(E), P)$ um espaço de probabilidades e $A, B \in \mathcal{P}(E)$ dois acontecimentos possíveis, incompatíveis e equiprováveis. Sabe-se ainda que $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,4$.

Qual é o valor de $P(\bar{A} \cap B)$?

- (A) 0 (B) 0,3 (C) 0,4 (D) 1

3. Seja f a função, de domínio $]-1, +\infty[$, definida por:

$$f(x) = \frac{\ln(3x + 3)}{x + 1} + 5$$

3.1. Recorrendo a processos exclusivamente analíticos, prove que a seguinte proposição é verdadeira:

$$\exists c \in \left] -\frac{1}{2}, 0 \right[: f'(c) = 2 \left(f(0) - f\left(-\frac{1}{2}\right) \right)$$

3.2. Recorrendo a processos exclusivamente analíticos, estude a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos.

Na sua resposta, apresente:

- o intervalo em que a função é crescente;
- o intervalo em que a função é decrescente;
- o valor de x para o qual a função tem um extremo.

3.3. Considere os pontos:

- A , ponto do gráfico de f , de abcissa c , cuja existência ficou provada na alínea 3.1.;
- B , ponto do gráfico de f cuja abcissa é o único zero da função f ;
- O , origem de um referencial ortonormado.

Recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora, determine a área do triângulo $[OAB]$.

Na sua resposta, deve:

- reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- indicar as coordenadas, com arredondamento às milésimas, dos pontos A e B ;
- desenhar o triângulo $[OAB]$, assinalando os pontos que representam os seus vértices;
- apresentar o resultado pedido, com arredondamento às centésimas.

4.

4.1. Em \mathbb{C} , conjunto dos números complexos, considere $z_1 = -1 + 3i$ e $z_2 = -\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$.

Determine $\frac{z_1 + (z_2)^{14}}{1 - i^{2019}}$, apresentando o resultado na forma algébrica.

4.2. Mostre que $\bar{z}w + z\bar{w}$ é um número real, para quaisquer $z, w \in \mathbb{C}$.

FIM DO CADERNO 1

COTAÇÕES (Caderno 1)

Item							
Cotação (em pontos)							
1.	2.	3.1	3.2	3.3	4.1	4.2	
8	8	14	20	20	14	12	96

CADERNO 2: 45 MINUTOS
NÃO É PERMITIDO O USO DA CALCULADORA.



5. Sejam f' e f'' , de domínio \mathbb{R} , a primeira e a segunda derivadas de uma função f , respetivamente.

Para um certo número real a , sabe-se que:

• P é o ponto do gráfico de f de abcissa a ;

• $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = 0$;

• $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a} = -1$.

Qual das afirmações seguintes é necessariamente verdadeira?

(A) a é um zero da função f .

(B) P é um ponto de inflexão do gráfico da função f .

(C) $f(a)$ é um máximo relativo da função f .

(D) $f(a)$ é um mínimo relativo da função f .

6. Para cada número real k , considere a função f , de domínio $[-\frac{\pi}{2}, +\infty[$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(3x^2)}{\cos^2(\frac{\pi}{2} - x)} & \text{se } -\frac{\pi}{2} \leq x < 0 \\ k & \text{se } x = 0 \\ \frac{e^x - 1}{3x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

6.1. Mostre que não existe nenhum valor real de k para o qual a função f é contínua em $x = 0$.

6.2. Estude o gráfico da função f quanto à existência de assíntotas não verticais, e, caso existam, escreva as suas equações.

6.3. Em $]0, +\infty[$, considere a função h definida por $h(x) = f(x) \times 3x - x^2$.

Seja r a reta tangente ao gráfico da função h que tem declive mínimo.

O declive da reta r é:

(A) $\ln 2$

(B) $1 - (\ln 2)^2$

(C) $2 - \ln 4$

(D) 0

7. Seja g a função, de domínio $]-\pi, \pi[$, definida por $g(x) = 2\cos x + \cos^2 x + 5x$.

Estude a função g quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

Na sua resposta, apresente:

– o(s) intervalo(s) em que o gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo;

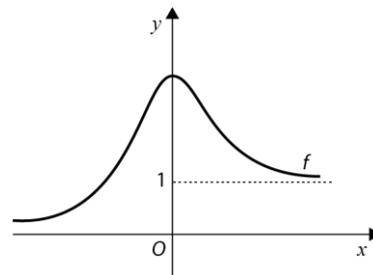
– o(s) intervalo(s) em que o gráfico de g tem a concavidade voltada para cima;

– as abcissas do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de g .

8. Na figura está a representação gráfica de uma função contínua f , de domínio \mathbb{R} .

Tal como a figura sugere, o eixo Ox e a reta de equação $y = 1$ são assíntotas ao gráfico de f .

Seja g a função, de domínio \mathbb{R} , definida por $g(x) = \frac{x+1}{f(x)}$.



Considere as afirmações seguintes:

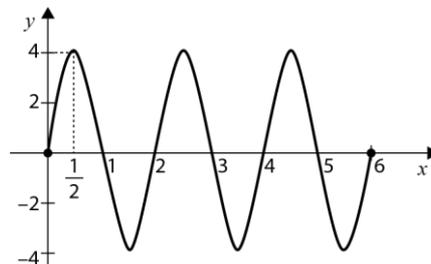
- (I) $g(0) \times f'(0) > 0$
- (II) O gráfico da função g admite uma assíntota horizontal quando $x \rightarrow +\infty$.
- (III) O gráfico da função g admite uma assíntota horizontal quando $x \rightarrow -\infty$.
- (IV) O gráfico da função g não admite assíntotas verticais.

Apenas uma das afirmações é verdadeira.

Elabore uma composição, na qual indique, justificando, o valor lógico de **cada uma** das afirmações.

9. Na figura está representado, no intervalo $[0,6]$, o movimento de um oscilador harmónico h .

Em qual das opções pode estar a expressão analítica $h(t)$ da função representada?



(A) $h(t) = 4 \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{3\pi}{2}\right)$

(B) $h(t) = 4 \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$

(C) $h(t) = 8 \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$

(D) $h(t) = 4 \cos\left(\pi t + \frac{3\pi}{2}\right)$

FIM DO CADERNO 2

COTAÇÕES (Caderno 2)

Item							
Cotação (em pontos)							
5.	6.1	6.2	6.3	7.	8.	9.	
8	20	20	8	20	20	8	104