TESTE N.º 4 – Proposta de resolução

Caderno 1

1.

1.1. Consideremos os seguintes acontecimentos:

A: "O produto ser vendido para os Estados Unidos da América."

B: "O produto ser vendido para o Japão."

Sabemos que:

- $P(A) = 2P(B)$
- $P(A \cup B) = 3P(A \cap B)$

Assim:

$$P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 3P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A) + \frac{1}{2}P(A) = 4P(A \cap B)$$
$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}P(A) = 4P(A \cap B)$$
$$\Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{3}{8}P(A)$$

Logo:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{8}P(A)}{P(A)} = \frac{3}{8}$$

1.2. Opção (C)

3! é o número de maneiras distintas de permutar os três conjuntos de atoalhados de cores diferentes entre si; 4! é o número de maneiras distintas de permutar os quatro robes distintos entre si; 5! é o número de maneiras distintas de permutar as cinco toalhas de praia distintas entre si e 3! é o número de maneiras distintas de escolher as posições dos três tipos de produtos (atoalhados, robes e toalhas de praia).

Assim, o valor pedido é igual a $3! \times 4! \times 5! \times 3! = 103\,680$.

2. $\boldsymbol{f(x) = -x^2 + 2\text{sen}\, x + \text{sen}^2 x}$ $\qquad\qquad$ $\boldsymbol{D_f = [-\pi, \pi]}$

$\boldsymbol{f'(x) = -2x + 2\cos x + 2\text{sen}x\cos x = -2x + 2\cos x + \text{sen}(2x)}$ $\qquad$ $\boldsymbol{D_{f'} = [-\pi, \pi]}$

$\boldsymbol{f''(x) = -2 - 2\text{sen}\, x + 2\cos(2x)}$ $\qquad\qquad$ $\boldsymbol{D_{f''} = [-\pi, \pi]}$

$\boldsymbol{f''(x) = 0}$

$$\boldsymbol{2\cos(2x) - 2\text{sen}x - 2 = 0 \Leftrightarrow 2\left(\cos^2 x - \text{sen}^2 x\right) - 2\text{sen}x - 2 = 0}$$
$$\boldsymbol{\Leftrightarrow 2\left(1 - 2\text{sen}^2 x\right) - 2\text{sen}x - 2 = 0}$$
$$\boldsymbol{\Leftrightarrow 2 - 4\text{sen}^2 x - 2\text{sen}x - 2 = 0}$$
$$\boldsymbol{\Leftrightarrow -2\text{sen}x(2\text{sen}x + 1) = 0}$$

$$\Leftrightarrow -2\mathbf{sen}\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \quad \vee \quad \mathbf{sen}\boldsymbol{x} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{k}\boldsymbol{\pi} \ \vee \ \boldsymbol{x} = -\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{6}} + \mathbf{2}\boldsymbol{k}\boldsymbol{\pi} \ \vee \ \boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{7}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{6}} + \mathbf{2}\boldsymbol{k}\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}$$

Em $[-\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\pi}]$: $\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{x} = -\frac{\mathbf{5}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{6}}, \boldsymbol{x} = -\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{6}}, \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ e $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\pi}$

x	$-\pi$		$-\frac{5\pi}{6}$		$-\frac{\pi}{6}$		0		π
$-\mathbf{2sen}\boldsymbol{x}$	0	+	+	+	+	+	0	−	0
$\mathbf{2sen}\boldsymbol{x} + \mathbf{1}$	+	+	0	−	0	+	+	+	+
Sinal de f''	0	+	0	−	0	+	0	−	0
Sentido das concavidades do gráfico de f	$f(-\pi)$	∪	P.I.	∩	P.I.	∪	P.I.	∩	$f(\pi)$

Cálculos auxiliares

$2\text{sen}(-\pi) + 1 = 0 + 1 = 1 \quad (> 0)$

$2\text{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 1 = -2 + 1 = -1 \quad (< 0)$

$2\text{sen}(\pi) + 1 = 0 + 1 = 1 \quad (> 0)$

O gráfico de $\boldsymbol{f}$ tem a concavidade voltada para cima em $\left[-\boldsymbol{\pi}, -\frac{\mathbf{5}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{6}}\right]$ e em $\left[-\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{6}}, \mathbf{0}\right]$ e tem a concavidade voltada para baixo em $\left[-\frac{\mathbf{5}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{6}}, -\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{6}}\right]$ e em $[\mathbf{0}, \boldsymbol{\pi}]$; o gráfico de $\boldsymbol{f}$ tem três pontos de inflexão de abcissas $-\frac{\mathbf{5}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{6}}, -\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{6}}$ e $\mathbf{0}$.

3.

3.1. $f(t) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(\pi t) + \frac{\sqrt{2}}{2}\text{sen}(\pi t)\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(\pi t) + \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\text{sen}(\pi t)\right) =$

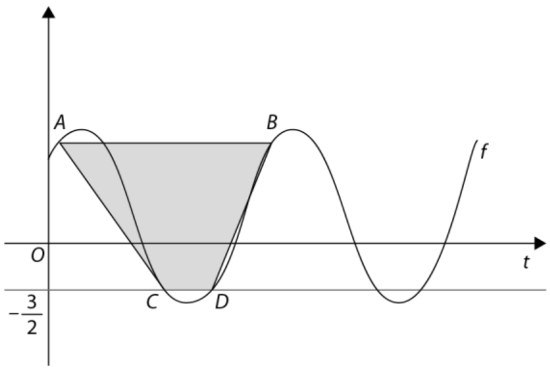
$$= 2\cos\left(\pi t - \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= 2\cos\left(\pi t - \frac{\pi}{4} + 2\pi\right) =$$

$$= 2\cos\left(\pi t + \frac{7\pi}{4}\right)$$

Como $2 > 0$, $\pi > 0$ e $\frac{7\pi}{4} \in [0, 2\pi[$, $f(t) = 2\cos\left(\pi t + \frac{7\pi}{4}\right)$ é um oscilador harmónico de amplitude 2, período $\frac{2\pi}{\pi} = 2$, frequência $\frac{1}{2}$ e ângulo de fase $\frac{7\pi}{4}$.

3.2.



$C\left(c, -\frac{3}{2}\right) \quad c \approx 1{,}02$

$D\left(d, -\frac{3}{2}\right) \quad d \approx 1{,}48$

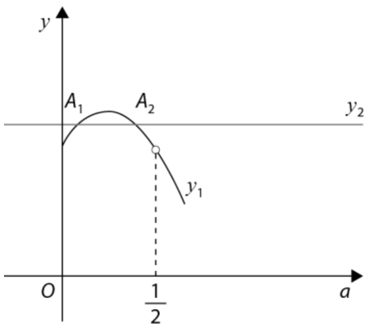
$$A_{[CABD]} = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2} \times h \approx \frac{2 + (1{,}48 - 1{,}02)}{2} \times \left(2\cos\left(\pi t + \frac{7\pi}{4}\right) + \frac{3}{2}\right) =$$

$$= \frac{2{,}46}{2} \times \left(2\cos\left(\pi t + \frac{7\pi}{4}\right) + 1{,}5\right) =$$

$$= 1{,}23 \times \left(2\cos\left(\pi t + \frac{7\pi}{4}\right) + 1{,}5\right)$$

Pretendemos determinar $a \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ tal que $1{,}23 \times \left(2\cos\left(\pi a + \frac{7\pi}{4}\right) + 1{,}5\right) = 4$.

Utilizando as capacidades gráficas da calculadora:



$y_1 = 1{,}23 \times \left(2\cos\left(\pi a + \frac{7\pi}{4}\right) + 1{,}5\right)$

$y_2 = 4$

$A_1(a_1, 4) \quad a_1 \approx 0{,}09$

$A_2(a_2, 4) \quad a_2 \approx 0{,}41$

Assim, o ponto A pode ter abcissa igual a 0,09 ou 0,41.

4. Opção (D)

$$5000\left(1 + \frac{0{,}5}{100}\right)^{2\times 10} = 5000\left(1 + \frac{0{,}5}{100}\right)^{20} \approx 5524{,}48$$

5. Opção (C)

$$\lim u_n = \lim\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{3n} = \lim\left(\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{3}{n}}\right)^{3n} = \lim \frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)^{3n}}{\left(1+\frac{3}{n}\right)^{3n}} = \frac{\left[\lim\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n}\right]^3}{\left[\lim\left(1+\frac{3}{n}\right)^{n}\right]^3} = \frac{\left(e^2\right)^3}{\left(e^3\right)^3} = e^{6-9} = e^{-3}$$

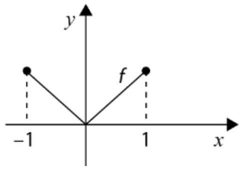
$$\lim f(u_n) = \lim_{x\to e^{-3}} f(x) = \lim_{x\to e^{-3}}\left[\ln\left(\frac{x}{e^{-4}}\right)\right] = \ln\left(\frac{e^{-3}}{e^{-4}}\right) = \ln(e) = 1$$

Caderno 2

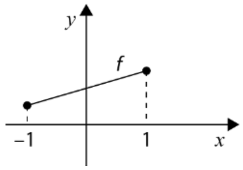
6. Opção (D)

f é contínua em $[-1,1]$, logo, pelo teorema de Weierstrass, a função f tem máximo e mínimo absolutos.

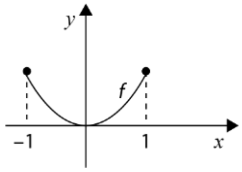
De seguida, apresentamos contraexemplos para justificar que as outras opções não são verdadeiras.



f é contínua em $[-1,1]$. Porém, f não é diferenciável em $x=0$.



f é contínua em $[-1,1]$. Porém, f não tem zeros..



f é contínua em $[-1,1]$. Porém, f não é injetiva.

7. Seja g a função de domínio $\mathbb{R}$ definida por $g(x)=f(x)-f(x-a)$.

1) g é contínua por se tratar da diferença de duas funções contínuas (a função f e a composta da função f com uma função polinomial). Em particular, g é contínua em $[0,a]$.

2) $g(0)=f(0)-f(-a)=f(0)-f(a)$

$g(a)=f(a)-f(0)=-g(0)$

Como $f(a)\neq f(0)$, então, $g(0)$ e $g(a)$ tem sinais contrários, donde se conclui que zero é um valor intermédio entre estas imagens.

Pelo teorema de Bolzano-Cauchy, concluímos que:

$$\exists c\in\,]0,a[\colon g(c)=0$$

isto é:

$\exists c\in\,]0,a[\colon f(c)-f(c-a)=0 \Leftrightarrow \exists c\in\,]0,a[\colon f(c)=f(c-a)$

Logo, a equação $f(x)=f(x-a)$ é possível no intervalo $]0,a[$.

8.

8.1.

- $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+4x\right)}{2x} - k^2\right) = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{-\text{sen}(4x)}{2x} - k^2\right) =$

$$= \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{-\text{sen}(4x)}{4x}\times 2 - k^2\right) =$$

$$= -2\lim_{x\to 0^-}\frac{\text{sen}(4x)}{4x} - k^2 =$$

$$= \underbrace{-2\lim_{4x\to 0^-}\frac{\text{sen}(4x)}{4x}}_{\text{limite notável}} - k^2 =$$

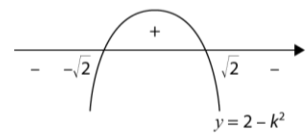
$$= -2\times 1 - k^2 =$$

$$= -2 - k^2$$

- $f(0) = -4$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) < f(0) \Leftrightarrow -2 - k^2 < -4 \Leftrightarrow 2 - k^2 < 0$

$\Leftrightarrow k < -\sqrt{2} \ \lor \ k > \sqrt{2}$



C.S. $=]-\infty, -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, +\infty[$

8.2. $k = 2$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+4x\right)}{2x} - 4 & \text{se} \quad x < 0 \\ -4 & \text{se} \quad x = 0 \\ \frac{\sqrt{x}}{x^2} & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$$

- $x \to -\infty$

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty}\left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+4x\right)}{2x} - 4\right) =$

$$= \lim_{x\to -\infty}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}+4x\right)\times\frac{1}{2x}\right] - \lim_{x\to -\infty} 4 =$$

$$\underbrace{=}_{(1)} 0 - 4 =$$

$$= -4$$

Cálculo auxiliar

(1) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}+4x\right)\times\frac{1}{2x}\right] = 0$, pois

$-1 \leq \cos\left(\frac{\pi}{2}+4x\right) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$ e

$\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{1}{2x} = 0$.

A reta de equação $y = -4$ é assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x \to -\infty$.

- $x \to +\infty$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x}}{x^2} = \lim_{x\to +\infty}\frac{x}{x^2\ \sqrt{x}} = \lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{+\infty} = 0$

A reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x \to +\infty$.

8.3. $f'(1)=\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{\frac{\sqrt{x}}{x^2}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-x^2}{x^2(x-1)}=$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x-x^4}{x^2(x-1)(\sqrt{x}+x^2)}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(-x^3-x^2-x)}{x^2(x-1)(\sqrt{x}+x^2)}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{-x^3-x^2-x}{x^2(\sqrt{x}+x^2)}=-\frac{3}{2}$$

Cálculo auxiliar

	-1	0	0	1	0
1		-1	-1	-1	0
	-1	-1	-1	0	$0 = R$

9. Opção (B)

$(\operatorname{sen} x+\cos x)^2+\cos x=\operatorname{sen}^2 x+2\operatorname{sen}x\cos x+\cos^2 x+\cos x=$

$=1+2\operatorname{sen}x\cos x+\cos x$

Por exemplo, se $x=\frac{\pi}{4}$, então:

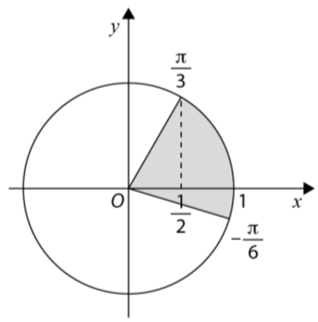
$1+2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=1+2\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{\sqrt{2}}{2}=1+1+\frac{\sqrt{2}}{2}=2+\frac{\sqrt{2}}{2}$

Porém, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=1+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=1+\frac{\sqrt{2}}{2}\neq 2+\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Logo, a proposição p é falsa.

O contradomínio da restrição da função cosseno ao intervalo $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$ é $\left[\frac{1}{2},1\right]$, logo o contradomínio da função f é $\left[\frac{1}{2}+1,1+1\right]=\left[\frac{3}{2},2\right]$.

Logo, a proposição q é falsa.



10. Sabe-se que $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-(3x-1))=0$, logo a reta de equação $y=3x-1$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f quando $x\to-\infty$. Como f é par, então o gráfico de f admite uma assíntota oblíqua ao gráfico de f quando $x\to+\infty$. Logo, a gráfico de f não pode admitir uma assíntota horizontal quando $x\to+\infty$. Portanto, a afirmação (I) é falsa.

Sabe-se também que $\forall x\in\mathbb{R}^+$, $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ existe e é positivo, isto é, $\forall x\in\mathbb{R}^+, f'(x)>0$. Assim, o declive da reta tangente ao gráfico de f em $x=1$ é positivo, logo não pode ser igual a -3, pelo que a reta de equação $(x,y)=(1,2)+k(1,-3), k\in\mathbb{R}$ não pode ser tangente ao gráfico de f em $x=1$. Portanto, a afirmação (II) é falsa.

Como $\forall x\in\mathbb{R}^+, f'(x)>0$, concluímos que:

- f é contínua em $\mathbb{R}^+$ e, em particular, f é contínua em $[2,3]$;
- f é diferenciável em $\mathbb{R}^+$ e, em particular, f é diferenciável em $]2,3[$.

Logo, pelo teorema de Lagrange, concluímos que existe $c\in\,]2,3[$ tal que $f'(c)=\frac{f(3)-f(2)}{3-2}$, ou seja, existe $c\in\,]2,3[: f'(c)=f(3)-f(2)$. Portanto, a afirmação (III) é verdadeira.